

数チャレ 第214回 (2018年11月)

正の整数を分母として分子が1である分数を単位分数と呼ぶことにする。

- (1) $\frac{3}{5}$ を2つの単位分数の和で表せ。
- (2) $\frac{3}{7}$ は2つの単位分数の和で表せないことを示せ。
- (3) p, q が異なる素数であるとき, $\frac{p}{q}$ が2つの単位分数の和で表せる条件を求めよ。

解答

(1) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{5+1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ (答)

(2) ある正の整数 m, n に対して

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn}$$

が成り立つとすれば,

$$mn = \frac{7}{3}(m+n)$$

$$\left(m - \frac{7}{3}\right)\left(n - \frac{7}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}\right)^2$$

$$\therefore (3m-7)(3n-7) = 7^2$$

7が素数であることと $3m-7 > -7$, $3n-7 > -7$ より

$$(3m-7, 3n-7) = (1, 49), (7, 7), (49, 1)$$

に限られるが, これらを満たす整数 m, n は存在しない。

よって, $\frac{3}{7}$ は2つの単位分数の和で表せない。

(おわり)

(3) 正の整数 m, n を用いて

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn}$$

と表されるとき,

$$mn = \frac{q}{p}(m+n)$$

$$\left(m - \frac{q}{p}\right)\left(n - \frac{q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^2$$

$$(pm-q)(pn-q) = q^2$$

q が素数であることと $pm-q > -q$, $pn-q > -q$ より

$$(pm-q, pn-q) = (1, q^2), (q, q), (q^2, 1)$$

$$\therefore (m, n) = \left(\frac{q+1}{p}, \frac{q(q+1)}{p} \right), \left(\frac{2q}{p}, \frac{2q}{p} \right), \left(\frac{q(q+1)}{p}, \frac{q+1}{p} \right)$$

$\frac{2q}{p}$ または $\frac{q+1}{p}$ が整数となる条件を求めて (p と q は異なる素数であるから)

$$p = 2 \text{ または } p \mid q+1 \quad (\text{答})$$