数チャレ 第215回(2018年12月)

$\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}+\dfrac{z}{z^2+1}$ が整数となるような自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ。

解答

相加・相乗平均の不等式より

$$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{x+\dfrac{1}{x}}\leqq\frac{1}{2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}}=\frac{1}{2}$$

$y,\ z$ についても同様であり,

$$0<\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\leqq\frac{3}{2}$$

であるから,これが整数になるとすれば

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=1$$

の場合に限られる。

対称性を考え,まず

$$1\leqq x\leqq y\leqq z$$

の場合を求める。このとき,

$$\frac{x}{x^2+1}-\frac{y}{y^2+1}=\frac{x(y^2+1)-y(x^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)}=\frac{(y-x)(xy-1)}{(x^2+1)(y^2+1)}\geqq 0$$

より

$$\frac{x}{x^2+1}\geqq\frac{y}{y^2+1}\geqq\frac{z}{z^2+1}$$

であるから,

$$\frac{3x}{x^2+1}\geqq\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=1$$

$$\therefore\ x^2+1\leqq 3x$$

$f(x)=x^2-3x+1$ とおくと,

$$f(1)=-1<0,\quad f(2)=-1<0,\quad f(3)=1>0$$

であるから,

$$x=1\ \text{または}\ x=2$$

に限られる。

(i) $x=1$ のとき

$$\frac{2y}{y^2+1}\geqq\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ y^2+1\leqq 4y$$

ⓒ 早稲田数学フォーラム

$g(y)=y^2-4y+1$ とおくと，

$$g(1)=-2<0,\quad g(3)=-2<0,\quad g(4)=1>0$$

であるから，

$y=1,\ 2,\ 3$ が必要である。

$x=1,\ y=1$ のとき

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=1+\frac{z}{z^2+1}>1$$

となって不適である。

$x=1,\ y=2$ のとき

$$\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

$$10z=z^2+1 \qquad \therefore\ z(10-z)=1$$

と変形されるが，これを満たす自然数 z は存在しない。

$x=1,\ y=3$ のとき

$$\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{1}{5}$$

$$5z=z^2+1 \qquad \therefore\ z(5-z)=1$$

と変形されるが，これを満たす自然数 z は存在しない。

(ii) $x=2$ のとき

$$\frac{2y}{y^2+1}\geqq\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

$$3(y^2+1)\leqq 10y$$

$$3y^2-10y+3=(3y-1)(y-3)\leqq 0$$

であるから，整数 y は

$y=2$ または $y=3$

であることが必要である。

$x=2,\ y=2$ のとき

$$\frac{z}{z^2+1}=\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

であるから，$x=1,\ y=3$ の場合で見たように不適である。

$x=2,\ y=3$ のとき

$$\frac{z}{z^2+1}=\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$$

$$3z^2-10z+3=0$$

$$(3z-1)(z-3)=0 \qquad \therefore\ z=3$$

$x\leqq y\leqq z$ 以外の大小の場合もあわせて，求める自然数の組は

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 3),\ (3,\ 2,\ 3),\ (3,\ 3,\ 2)\quad \text{(答)}$$

ですべてである。

ⓒ 早稲田数学フォーラム