

数チャレ 第216回 (2019年1月)

- (1) 31 で割った余りが 2019 と等しい平方数が存在することを示せ。
(2) 2019 より大きく, 31 で割った余りが 2019 と等しい平方数の中で, 最小のものを求めよ。

解答

(1) $2019 = 31 \times 65 + 4$ より

$$2019 \equiv 4 \equiv 2^2 \pmod{31}$$

(おわり)

(2) $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$ より

2019 より大きい最小の平方数は 45^2

31 は素数であるから, 平方数 n^2 が

$$n^2 \equiv 2019 \equiv 2^2 \pmod{31}$$

であるとすれば,

$$n^2 - 2^2 = (n+2)(n-2) \equiv 0 \pmod{31}$$

より

$$n+2 \equiv 0 \pmod{31} \text{ または } n-2 \equiv 0 \pmod{31}$$

よって, 31 で割った余りが 2019 と等しい平方数であり, 45^2 以上で最小のものは

$$(31 \times 2 - 2)^2 = 60^2 = 3600 \quad (\text{答})$$