

## 数チャレ 第218回 (2019年3月)

次のように1, 3, 4を繰り返し並べて得られる数列を  $\{a_n\}$  とする.

$$1, 3, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 4, \dots$$

すなわち,  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4$  で, 4以上の自然数  $n$  に対し,  $a_n = a_{n-3}$  とする. この数列の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1)  $S_n$  を求めよ.
- (2)  $S_n = 2019$  となる自然数  $n$  は存在しないことを示せ.
- (3) どのような自然数  $k$  に対しても,  $S_n = k^2$  となる自然数  $n$  が存在することを示せ.

出典: 2019年 神戸大学

### 解答

- (1)  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4, a_n = a_{n-3} (n \geq 4)$  より,  $\{S_{3m-2}\}, \{S_{3m-1}\}, \{S_{3m}\}$  はそれぞれ公差8の等差数列であるから

$$S_{3m-2} = S_1 + 8(m-1) = 1 + 8(m-1) = 8m - 7$$

$$S_{3m-1} = S_2 + 8(m-1) = 1 + 3 + 8(m-1) = 8m - 4$$

$$S_{3m} = S_3 + 8(m-1) = 1 + 3 + 4 + 8(m-1) = 8m$$

$n = 3m - 2$  のとき

$$S_{3m-2} = 8 \cdot \frac{n+2}{3} - 7 = \frac{8n-5}{3}$$

$n = 3m - 1$  のとき

$$S_{3m-1} = 8 \cdot \frac{n+1}{3} - 4 = \frac{8n-4}{3}$$

$n = 3m$  のとき

$$S_{3m} = 8 \cdot \frac{n}{3} = \frac{8}{3}n$$

以上をまとめて

$$S_n = \begin{cases} \frac{8n-5}{3} & (n \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき}) \\ \frac{8n-4}{3} & (n \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき}) \\ \frac{8}{3}n & (n \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

- (2) (1)の考察より

$$S_n \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$$

であるが，

$$2019 = 8 \times 252 + 3 \equiv 3 \pmod{8}$$

であるから， $S_n = 2019$ となる自然数  $n$  は存在しない。

(証明おわり)

(3) 4 の倍数の平方は 16 の倍数であり，特に 8 で割り切れる。

4 で割れない偶数  $4m - 2$  の平方

$$(4m - 2)^2 = 8(2m^2 - 2m) + 4$$

は 8 で割ると 4 余る。奇数の平方

$$(2m - 1)^2 = 4m(m - 1) + 1$$

はすべて 8 で割ると 1 余る。よって，

8 を法とする平方剰余は 0, 1, 4 のいずれか

である。

(1)より，数列  $\{S_n\}$  は 8 を法として平方剰余となる自然数を小さい方からすべて並べたものであるから，任意の平方数  $k^2$  は数列  $\{S_n\}$  の項として現れる。

(証明おわり)