

数チャレ 第219回 (2019年4月)

自然数 n の各位の数の和を $S(n)$ で表す。たとえば,

$$S(2019) = 2 + 0 + 1 + 9 = 12$$

である。次の問いに答えなさい。

- (i) $n + S(n) = 100$ を満たす n を求めなさい。
- (ii) $S(n) = 100$ を満たす最小の n を求めなさい。
- (iii) $n \leq 27S(n) + 2019$ を満たす最大の n を求めなさい。

出典：2019年 秋田大学

解答

- (i) $S(n) \geq 1$ より

$$n + 1 \leq n + S(n) = 100$$

であるから $n \leq 99$ であり,

$$n = 10a + b \quad (a, b \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

と表され,

$$n + S(n) = 11a + 2b = 100 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$b \leq 9$ より

$$100 \leq 11a + 2 \times 9 \quad \therefore 11a \geq 82$$

a は 0 以上 9 以下の整数であるから

$$a = 8 \text{ または } 9$$

②より

$$a = 8, \quad b = 6$$

①に代入して, $n + S(n) = 100$ を満たす自然数 n は

$$n = 86 \quad (\text{答})$$

- (ii) $100 > 9 \times 11$ より

$$S(n) = 100$$

を満たす自然数 n は 12桁以上である。そのうち最小のものは,桁数と最高位の数をできるだけ小さくすることにより,下11桁がすべて9の数

$$19999999999 \quad (\text{答})$$

である。

(iii) $n \leq 27S(n) + 2019$ ③

を満たす自然数 n が r 桁であるとすれば,

$$10^{r-1} \leq n \leq 27S(n) + 2019 \leq 27 \cdot 9r + 2019$$

が成り立たなければならない。

$$10^3 = 1000 < 243 \times 4 + 2019 = 2991$$

$$10^4 = 10000 > 243 \times 5 + 2019 = 3234$$

$10^{k-1} > 243k + 2019$ が成り立つとすれば,

$$\begin{aligned} 10^k &> 2430k + 20190 = 243(k+1) + 2019 + 2187k + 17928 \\ &> 243(k+1) + 2019 \end{aligned}$$

よって, ③を満たす自然数 n は 4 桁以下であるから,

$$n = 1000a + 100b + 10c + d \quad \dots\dots ④$$

(a, b, c, d は 0 以上 9 以下の整数)

と表され, ③は

$$1000a + 100b + 10c + d \leq 27(a + b + c + d) + 2019$$

$$\therefore 973a + 73b \leq 17c + 26d + 2019 \quad \dots\dots ⑤$$

$c \leq 9, d \leq 9$ より

$$17c + 26d + 2019 \leq 17 \times 9 + 26 \times 9 + 2019 = 2406$$

$973a \leq 2406, 973 \times 2 = 1946, 973 \times 3 = 2919$ より

$$a \leq 2$$

$973 \times 2 + 73 = 2019 < 2406$ を考えると, n を最大にすべく

$$a = 2, c = d = 9$$

ととることができて, ⑤より

$$73b \leq 2406 - 973 \times 2 = 460$$

$73 \times 6 = 438, 73 \times 7 = 511$ より

$$b \leq 6$$

以上より, ③を満たす最大の自然数 n は

$$n = 2699 \quad (\text{答})$$