

数チャレ 第220回 (2019年5月)

次の問いに答えよ。

- (1) $2^n - 1$ が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。
(2) $n^n - 1$ が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

出典：2019年 信州大学 理学部・医学部

解答

- (1) 2項定理より

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= (3 - 1)^n - 1 \\ &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cdot 3^k (-1)^{n-k} - 1 \\ &\equiv (-1)^n - 1 \pmod{3} \end{aligned}$$

であるから、 $2^n - 1$ が 3 で割り切れるような自然数 n は

$$n = 2k \quad (k \text{ は自然数}) \quad (\text{答})$$

- (2)(i) n が 3 の倍数のとき

$$n^n - 1 \equiv -1 \pmod{3}$$

であり、 $n^n - 1$ は 3 で割り切れない。

- (ii) $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$n^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

であり、 $n^n - 1$ は 3 で割り切れる。

- (iii) $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$n^n - 1 \equiv 2^n - 1 \pmod{3}$$

であり、(1)より $2^n - 1$ が 3 で割り切れるのは n が偶数のときであるから、

$$n - 2 \text{ が } 2 \text{ および } 3 \text{ で割り切れる}$$

ときである。2と3は互いに素であるから、それは

$$n - 2 \text{ が } 6 \text{ の倍数}$$

のときである。

以上より、 $n^n - 1$ が 3 で割り切れるような自然数 n は

$$n = 3a + 1 \quad (a \text{ は非負整数}) \text{ または } 6b + 2 \quad (b \text{ は非負整数}) \quad (\text{答})$$