

数チャレ 第221回 (2019年6月)

自然数 n に対し, $f(n) = n^2(n^2 + 8)$ と定める。次の問いに答えよ。

- (1) $f(4)$ の正の約数の個数を求めよ。
- (2) $f(n)$ は 3 の倍数であることを証明せよ。
- (3) $f(n)$ の相異なる素因数の個数が 2 個であり, かつ $f(n)$ の正の約数の個数が 10 個であるとする。 n をすべて求めよ。

出典: 2019年 徳島大学 理工学部

解答

(1) $f(4) = 4^2 \times (4^2 + 8) = 2^4 \times (2^4 + 2^3) = 2^7 \times 3$

の正の約数の個数は

$$(7 + 1) \times (1 + 1) = 16 \text{ 個} \quad (\text{答})$$

- (2) $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$$f(n) \equiv 0^2 \times (0^2 + 8) \equiv 0 \pmod{3}$$

$n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$f(n) \equiv 1^2 \times (1^2 + 8) \equiv 9 \equiv 0 \pmod{3}$$

$n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$f(n) \equiv 2^2 \times (2^2 + 8) \equiv 2^2 \times 12 \equiv 0 \pmod{3}$$

よって, 任意の自然数 n に対して, $f(n)$ は 3 の倍数である。 (証明おわり)

- (3) (2)より, $f(n)$ は 3 で割り切れるから, 素因数が 2 個で正の約数が 10 個となるのは, 3 でない素数 p を用いて

$$f(n) = n^2(n^2 + 8) = 3p^4 \text{ または } 3^4p$$

と表される。

- (i) $n^2(n^2 + 8) = 3p^4$ のとき

平方因数 n^2 に注目すると, $n^2 = 1$ または p^2 または p^4 であるが,

$$1^2 + 8 = 3^2, \quad n^2 + 8 > 3$$

であるから,

$$n^2 = p^2, \quad n^2 + 8 = 3p^2 \quad \therefore n = p = 2 \text{ (素数)}$$

- (ii) $n^2(n^2 + 8) = 3^4p$ のとき

$n^2 = 1$ または 3^2 または 3^4 であるが,

$$1^2 + 8 = 3^2, \quad 3^2 \times (3^2 + 8) \not\equiv 0 \pmod{3^4}$$

であるから,

$$n^2 = 3^4, \quad n^2 + 8 = p \quad \therefore n = 9, \quad p = 89 \text{ (素数)}$$

以上より, 求める n は

$$n = 2, 9 \quad (\text{答})$$