

数チャレ 第222回 (2019年7月)

(1) xy 平面上で領域 $1 \leq x \leq y \leq \frac{n}{x}$ 内にある格子点の個数を N_n と表すとき,

$$n \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}[\sqrt{n}]([\sqrt{n}] + 1) < N_n \leq n \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}[\sqrt{n}]([\sqrt{n}] - 1)$$

が成り立つことを示せ。ただし, $[\sqrt{n}]$ は \sqrt{n} を越えない最大の整数を表す。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{n}$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]^2}{n}$ を求めよ。

(3) 自然数 n の正の約数の個数を $d(n)$ で表し, $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(k)$ とするとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - \log n)$$

を求めよ。必要ならば, オイラー定数 $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$ を用いてよい。

なお, C が存在することは示さなくてよい。

解答

(1) $1 \leq k \leq \sqrt{n}$ のとき $x = k$ 上で $k \leq y \leq \frac{n}{k}$ であるから

$$N_n = \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \left(\left[\frac{n}{k} \right] - k + 1 \right) = \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{k} \right] - \frac{1}{2}[\sqrt{n}]([\sqrt{n}] - 1)$$

$$\frac{n}{k} - 1 < \left[\frac{n}{k} \right] \leq \frac{n}{k} \text{ より}$$

$$n \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - [\sqrt{n}] < \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{k} \right] \leq n \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k}$$

$$n \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}[\sqrt{n}]([\sqrt{n}] + 1) < N_n \leq n \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}[\sqrt{n}]([\sqrt{n}] - 1)$$

(証明おわり)

(2) $\sqrt{n} - 1 < [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$ より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} < \frac{[\sqrt{n}]}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(\sqrt{n} - 1)^2}{n} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 < \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} \leq 1$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから, ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} = 1 \quad (\text{答})$$

(3) $\sum_{k=1}^n d(k)$ は、領域 $x \geq 1, y \geq 1, xy \leq n$ 内の格子点の個数と等しいから、

$$A_n = \frac{2N_n - [\sqrt{n}]}{n}$$

であり、(1)より

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - \log n - \frac{[\sqrt{n}]^2 + 2[\sqrt{n}]}{n} \\ & < A_n - \log n \leq 2 \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - \log n - \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\sqrt{n} - 1 < [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$ より

$$\begin{aligned} \log[\sqrt{n}] & \leq \log \sqrt{n} = \frac{1}{2} \log n \\ & > \log(\sqrt{n} - 1) = \log n^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n}} \\ & = \frac{1}{2} \log n + \log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ -2 \log[\sqrt{n}] + 2 \log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) & < -\log n \leq -2 \log[\sqrt{n}] \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} & 2 \left(\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - \log[\sqrt{n}] \right) + 2 \log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ & < 2 \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - \log n \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - \log[\sqrt{n}] \right) \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - \log[\sqrt{n}] \right) = C, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$ であるから、ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - \log n \right) = 2C \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(2)より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]^2 + 2[\sqrt{n}]}{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

であるから、①、②、③より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - \log n) = 2C - 1 \quad (\text{答})$$