

数チャレ 第223回 (2019年8月)

- (1) 整数 m, n が $|m+ni| = 1$ を満たすとき, $m+ni$ をすべて求めよ。
(2) $(a+bi)(c+di) = 5-i$, $1 < |a+bi| < |c+di|$ を満たす整数の組 (a, b, c, d) をすべて求めよ。

解答

- (1) $|m+ni|^2 = m^2 + n^2 = 1$ より
 $(m^2, n^2) = (1, 0)$ または $(0, 1)$
 $\therefore (m, n) = (\pm 1, 0)$ または $(0, \pm 1)$

求める複素数は

$$m + ni = \pm 1, \pm i \quad (\text{答})$$

- (2) $(a+bi)(c+di) = 5-i$ の両辺の絶対値(の平方)を考えて
 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 5^2 + (-1)^2 = 2 \times 13$
 $1 < |a+bi| < |c+di|$ より $1 < a^2 + b^2 < c^2 + d^2$ であるから
 $a^2 + b^2 = 2, \quad c^2 + d^2 = 13$
 $\therefore a^2 = b^2 = 1, \quad (c^2, d^2) = (2^2, 3^2), (3^2, 2^2)$

したがって, 整数の組 (c, d) は

$$(1+i)(c+di) = c-d + (c+d)i = \pm(5-i)$$
$$(1-i)(c+di) = c+d + (-c+d)i = \pm(5-i)$$

により定まる4組であるから, そのうち1組だけ求めれば, (1)で求めた $\pm 1, \pm i$ をかけることですべて得られる。

$$c-d + (c+d)i = 5-i$$

のとき, $c-d = 5$ かつ $c+d = -1$ より

$$c = 2, \quad d = -3$$

であるから, $1 \times 1 = -1 \times (-1) = i \times (-i) = 1$ を考えて

$$(a+bi, c+di) = (1+i, 2-3i), (-1+i, -(2-3i)),$$
$$(i(1+i), -i(2-3i)), (-i(1+i), i(2-3i))$$

求める整数の組は

$$(a, b, c, d) = (1, 1, 2, -3), (-1, -1, -2, 3),$$
$$(-1, 1, -3, -2), (1, -1, 3, 2)$$

(答)

(注) もちろん, 4つの場合すべての連立方程式を計算してもよい。