

数チャレ 第224回 (2019年9月)

a, b は互いに素な奇数であるとする。

- (1) $\frac{a^2-5b^2}{4}, \frac{a^2+3b^2}{4}$ はともに整数であることを示せ。
- (2) a^2-5b^2 と a^2+3b^2 の最大公約数 d を求めよ。
- (3) $(a^2-5b^2)(a^2+3b^2) = k^2$ を満たす整数 k は存在しないことを示せ。

解答

- (1) 奇数は $2c+1$ (c は整数) と表され,

$$(2c+1)^2 = 4c(c+1) + 1$$

隣り合う整数 $c, c+1$ の一方は偶数であるから

奇数の平方は 8 で割ると 1 余る。

$$a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{8} \text{ より}$$

$$a^2 - 5b^2 \equiv 1 - 5 \equiv 4 \pmod{8}$$

$$a^2 + 3b^2 \equiv 1 + 3 \equiv 4 \pmod{8}$$

であるから, a^2-5b^2 および a^2+3b^2 は 4 で割り切れ, $\frac{a^2-5b^2}{4}$ および $\frac{a^2+3b^2}{4}$ は整数である。 (証明おわり)

- (2) $\frac{a^2-5b^2}{4}$ と $\frac{a^2+3b^2}{4}$ が共通の素因数 p をもつとすれば,

$$a^2 - 5b^2 \equiv a^2 + 3b^2 \equiv 4 \pmod{8}$$

より p は奇素数であり,

$$2a^2 = 3 \cdot \frac{a^2-5b^2}{4} + 5 \cdot \frac{a^2+3b^2}{4}, \quad 2b^2 = -\frac{a^2-5b^2}{4} + \frac{a^2+3b^2}{4}$$

はともに p で割り切れるが, a と b が互いに素であることに反する。よって,

$$d = \gcd(a^2-5b^2, a^2+3b^2) = 4 \quad (\text{答})$$

- (3) $(a^2-5b^2)(a^2+3b^2) = k^2$ を満たす整数 k が存在するとすれば, (2) の結果より

$$a^2 - 5b^2 = 4m^2, \quad a^2 + 3b^2 = 4n^2$$

を満たす互いに素な整数 m, n が存在する。 $a^2-5b^2 \equiv a^2+3b^2 \equiv 4 \pmod{8}$ より

$$m, n \text{ はともに奇数}$$

である。2式の差をとって a^2 を消去すると

$$8b^2 = 4n^2 - 4m^2 \quad \therefore 2b^2 = n^2 - m^2$$

b, n, m はすべて奇数で $b^2 \equiv n^2 \equiv m^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であるから

$$2b^2 \equiv 2 \pmod{8}, \quad n^2 - m^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

となって矛盾する。

よって, $(a^2-5b^2)(a^2+3b^2) = k^2$ を満たす整数 k は存在しない。

(証明おわり)