

## 数チャレ 第225回 (2019年10月)

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{xyz}$  が自然数となるような相異なる自然数の組  $(x, y, z)$  をすべて求めよ。

解答

$$n = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{xyz} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

とおく。対称性を考えて

$$(1 \leq) x < y < z \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

のときを考えると,  $n \geq 1$  より

$$1 + \frac{1}{xyz} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{3}{x}$$

$x$  は自然数であるから

$$x = 1 \text{ または } 2$$

(i)  $x = 1$  のとき,  $\textcircled{1}$  より

$$n = 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{yz} = 1 + \frac{y+z-1}{yz} > 1$$

$n$  は自然数であるから  $n \geq 2$  であり,  $\textcircled{2}$  を考えて

$$1 < n - 1 + \frac{1}{yz} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{y}$$

このとき  $x = 1 < y < 2$  となって矛盾する。

(ii)  $x = 2$  のとき,  $\textcircled{1}$  より

$$\begin{aligned} 1 \leq n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{2yz} \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2yz} &\leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$  より  $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{y}$  であるから

$$x = 2 < y < 4 \quad \therefore y = 3$$

$\textcircled{3}$  より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{6z} &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{z} \\ \frac{1}{6} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{z} - \frac{1}{6z} = \frac{5}{6z} \\ \therefore y = 3 < z &\leq 5 \end{aligned}$$

$z = 4$  のとき

$$n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \times 3 \times 4} = \frac{12 + 8 + 6 - 1}{24} = \frac{25}{24}$$

$z = 5$  のとき

$$n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2 \times 3 \times 5} = \frac{15 + 10 + 6 - 1}{30} = 1$$

$x, y, z$  を入れかえた場合も考えて, 求める自然数の組は

$$(x, y, z) = (2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2) \quad (\text{答})$$