

数チャレ 第227回 (2019年12月)

$$\frac{m^2 - 2m + 3}{m^2 - 3} \cdot \frac{n^2 - 2n + 3}{n^2 - 3} = 1 \text{ を満たす整数の組 } (m, n) \text{ をすべて求めよ。}$$

解答

3は平方数でないから

$$m^2 - 3 \neq 0, \quad n^2 - 3 \neq 0$$

であることを考えて, $\frac{m^2 - 2m + 3}{m^2 - 3} \cdot \frac{n^2 - 2n + 3}{n^2 - 3} = 1$ を変形すると

$$\begin{aligned} (m^2 - 2m + 3)(n^2 - 2n + 3) &= (m^2 - 3)(n^2 - 3) \\ -2mn(m+n) + 6(m^2 + n^2) + (2m-3)(2n-3) &= 9 \\ -2mn(m+n) + 6(m+n)^2 - 8mn - 6(m+n) &= 0 \end{aligned}$$

$m+n = a, \quad mn = b$ とおくと

$$\begin{aligned} -ab + 3a^2 - 4b - 3a &= 0 \\ -(a+4)b + 3a(a+4) - 15a &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore (a+4)(3a-b-15) = -60 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

これを b について解くと

$$3a - b - 15 = -\frac{60}{a+4} \quad \therefore b = 3a - 15 + \frac{60}{a+4}$$

$D = (m-n)^2 = a^2 - 4b$ を計算しておく

$$\begin{aligned} D &= a^2 - 4\left(3a - 15 + \frac{60}{a+4}\right) \\ &= \frac{(a^2 - 12a + 60)(a+4) - 240}{a+4} \\ &= \frac{a^3 - 8a^2 + 12a}{a+4} \\ &= \frac{a(a-2)(a-6)}{a+4} \\ &= \frac{(a+4-4)(a+4-6)(a+4-10)}{a+4} \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①より

$a+4 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 30, \pm 60$ が必要であり, ②より D が(0も含む)平方数となる場合に限って, ①より b も求める。

$a+4 = 1, 2, 3$ のときは $D < 0$ となるから不適である。

$a+4 = 4$ のとき $a = 0, D = 0$ であり, $3a - b - 15 = -15$ より $b = 0$

$a+4 = 5$ のとき $a = 1, D = 1$ であり, $3a - b - 15 = -12$ より $b = 0$

$a+4 = 6$ のとき $a = 2, D = 0$ であり, $3a - b - 15 = -10$ より $b = 1$

$a+4 = 10$ のとき $a = 6, D = 0$ であり, $3a - b - 15 = -6$ より $b = 9$

$a + 4 = 12$ のとき $D = 8$ は平方数でない。
 $a + 4 = 15$ のとき $D = 33$ は平方数でない。
 $a + 4 = 20$ のとき $D = 2^4 \times 7$ は平方数でない。
 $a + 4 = 30$ のとき $D = 2^5 \times 3$ は平方数でない。
 $a + 4 = 60$ のとき $D = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ は平方数でない。
 $a + 4 = -1$ のとき $D = 5 \times 7 \times 11$ は平方数でない。
 $a + 4 = -2$ のとき $D = 2^5 \times 3^2$ は平方数でない。
 $a + 4 = -3$ のとき $D = 3 \times 7 \times 13$ は平方数でない。
 $a + 4 = -4$ のとき $D = 2^3 \times 5 \times 7$ は平方数でない。
 $a + 4 = -5$ のとき $D = 3^3 \times 11$ は平方数でない。
 $a + 4 = -6$ のとき $D = 2^6 \times 5$ は平方数でない。
 $a + 4 = -10$ のとき $D = 2^6 \times 7$ は平方数でない。
 $a + 4 = -12$ のとき $D = 2^4 \times 3 \times 11$ は平方数でない。
 $a + 4 = -15$ のとき $D = 5 \times 7 \times 19$ は平方数でない。
 $a + 4 = -20$ のとき $D = 2^3 \times 3^2 \times 13$ は平方数でない。
 $a + 4 = -30$ のとき $D = 2^5 \times 3 \times 17$ は平方数でない。
 $a + 4 = -60$ のとき $D = 2^6 \times 7 \times 11$ は平方数でない。

以上より，題意を満たすのは

$$(m + n, mn) = (a, b) = (0, 0), (1, 0), (2, 1), (6, 9)$$

のときであり， m, n は 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の 2 解であるから

$$(m, n) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (3, 3) \quad (\text{答})$$