数チャレ 第229回(2020年2月)

nを2以上の自然数として，階乗$n!$を素数の積で表すときに現れる2の個数をa_nとおく。すなわち$\dfrac{n!}{2^{a_n}}$は奇数である。

(1) $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$は奇数であることを示せ。

(2) $a_{2n}-a_n$をnを用いて表せ。

(3) $n=2^k$ (kは自然数)のとき，a_nをnを用いて表せ。

(4) $a_n<n$を示せ。

(5) $\sqrt[n]{n!}$ は無理数であることを示せ。

出典：2010年 滋賀医科大学

解答 (1) 2以上の自然数nに対して

$$2^b \leqq n < 2^{b+1}$$

を満たす自然数bがただ1つ存在する。

$$a_{2n}=\sum_{i=1}^{b+1}\left[\frac{2n}{2^i}\right]=\sum_{i=1}^{b+1}\left[\frac{n}{2^{i-1}}\right]=\sum_{j=0}^{b}\left[\frac{n}{2^j}\right]=n+\sum_{j=1}^{b}\left[\frac{n}{2^j}\right]=n+a_n$$

より，$(2n)!$と$2^n n!$は2で割れる回数が同じである。

$$\frac{(2n)!}{n!}=2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)$$

であるから，$\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$は奇数(2で割れない整数)である。

(証明おわり)

(2) (1)で考えたように

$$a_{2n}-a_n=n \quad (答)$$

(3) $n=2^k$ (kは自然数) のとき

$$a_n=\sum_{i=1}^{k}\frac{2^k}{2^i}=\sum_{j=0}^{k-1}2^j=2^k-1 \quad (答)$$

(4) $2^b \leqq n < 2^{b+1}$とすると

$$a_n=\sum_{i=1}^{b}\left[\frac{n}{2^i}\right]\leqq\sum_{i=1}^{b}\frac{n}{2^i}=\frac{n}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^b}{1-\frac{1}{2}}=n\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^b\right\}<n$$

(証明おわり)

ⓒ 早稲田数学フォーラム

(5)　$n \geqq 2$ より $a_n \geqq 1$ であるから，(4)とあわせて

$$0 < a_n < n$$

$\alpha = \sqrt[n]{n!}$ が有理数であるとすれば

$$\alpha = \frac{c}{d} \quad (c,\ d \text{ は互いに素な自然数})$$

と表され，

$$\alpha^n = \frac{c^n}{d^n} = n!$$

c と d は互いに素であるから $d = 1$ であり，

$$\alpha \text{ は自然数}$$

である。すると

$$\alpha^n = n! = 2^{a_n} b_n \quad (b_n \text{ は正の奇数})$$

と素因数分解できるから，a_n は n の倍数でなければならないが，$0 < a_n < n$ と矛盾する。

よって，$\sqrt[n]{n!}$ は無理数である。　(証明おわり)

ⓒ 早稲田数学フォーラム