

数チャレ 第230回 (2020年3月)

(1) ある正の整数 m に対して, x に関する方程式

$$x^3 - mx^2 + 2(2m - 3)x - (m + 9)(m - 9) = 0$$

の1つの解が2であった. このとき, $m = \boxed{(73)}\boxed{(74)}\boxed{(75)}$ であり, 他の2つの解は小さい順に

$$\boxed{(76)}\boxed{(77)}, \quad \boxed{(78)}\boxed{(79)}$$

である.

(2) ある正の整数 m に対して, x に関する方程式

$$x^3 - 20x^2 + mx - 2(m - 1) = 0$$

の解が3つの異なる正の整数となった. このとき, $m = \boxed{(80)}\boxed{(81)}\boxed{(82)}$ であり, 3つの解は小さい順に

$$\boxed{(83)}\boxed{(84)}, \quad \boxed{(85)}\boxed{(86)}, \quad \boxed{(87)}\boxed{(88)}$$

である.

出典: 2020年 慶應義塾大学 環境情報学部

解答

(1) $x = 2$ が解の1つであるから

$$2^3 - m \cdot 2^2 + 2(2m - 3) \cdot 2 - (m + 9)(m - 9) = 0$$

$$-8 + 4m - 4(2m - 3) + m^2 - 81 = 0$$

$$m^2 - 4m - 77 = 0$$

$$(m + 7)(m - 11) = 0$$

m は正の整数であるから

$$m = \frac{\boxed{011}}{\boxed{(73)}\boxed{(74)}\boxed{(75)}}$$

このとき, 題意の3次方程式は

$$x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 - 9x + 20) = 0$$

$$(x - 2)(x - 4)(x - 5) = 0$$

$x = 2$ 以外の解は小さい順に

$$x = \frac{\boxed{04}}{\boxed{(76)}\boxed{(77)}}, \quad \frac{\boxed{05}}{\boxed{(78)}\boxed{(79)}}$$

(2) 3つの正の整数解を α, β, γ ($0 < \alpha < \beta < \gamma$) とすると, 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 20 & \dots\dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = m & \dots\dots \textcircled{2} \\ \alpha\beta\gamma = 2(m - 1) & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

②かつ③より, m を消去すると

$$\alpha\beta\gamma = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$0 < \alpha\beta < \alpha\gamma < \beta\gamma$ より

$$\alpha\beta\gamma < 2(\beta\gamma + \beta\gamma + \beta\gamma) - 2 = 6\beta\gamma - 2 < 6\beta\gamma$$

$$\therefore \alpha < 6$$

α は正の整数であるから

α は 1, 2, 3, 4, 5 のいずれか

である。

(i) $\alpha = 1$ のとき, ④は

$$\beta\gamma + 2(\beta + \gamma) - 2 = 0 \quad \therefore (\beta + 2)(\gamma + 2) = 6$$

であるが, $1 + 2 < \beta + 2 < \gamma + 2$ より成り立たない。

(ii) $\alpha = 2$ のとき, ④は

$$4(\beta + \gamma) - 2 = 0$$

となって, β, γ が整数であることに反する。

(iii) $\alpha = 3$ のとき, ④は

$$\beta\gamma = 6(\beta + \gamma) - 2 \quad \therefore (\beta - 6)(\gamma - 6) = 34$$

$$-3 = 3 - 6 < \beta - 6 < \gamma - 6 \text{ より}$$

$$(\beta - 6, \gamma - 6) = (1, 34), (2, 17)$$

$$\therefore (\beta, \gamma) = (7, 40), (8, 23)$$

いずれも①を満たさない。

(iv) $\alpha = 4$ のとき, ④は

$$\beta\gamma = 4(\beta + \gamma) - 1 \quad \therefore (\beta - 4)(\gamma - 4) = 15$$

$$0 = 4 - 4 < \beta - 4 < \gamma - 4 \text{ より}$$

$$(\beta - 4, \gamma - 4) = (1, 15), (3, 5)$$

$$\therefore (\beta, \gamma) = (5, 19), (7, 9)$$

①も満たすのは

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (4, 7, 9)$$

(v) $\alpha = 5$ のとき, ④は

$$3\beta\gamma = 10(\beta + \gamma) - 2$$

$$\beta\gamma - \frac{10}{3}(\beta + \gamma) - \frac{2}{3}$$

$$\left(\beta - \frac{10}{3}\right)\left(\gamma - \frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9} - \frac{2}{3} = \frac{94}{9}$$

$$\therefore (3\beta - 10)(3\gamma - 10) = 94$$

$5 = 3 \times 5 - 10 < 3\beta - 10 < 3\beta - 10$ より成り立たない。

よって、題意の3次方程式の整数解は

$$\alpha = \frac{\boxed{04}}{(83)(84)}, \beta = \frac{\boxed{07}}{(85)(86)}, \gamma = \frac{\boxed{09}}{(87)(88)}$$

であり、②より

$$m = 4 \times 7 + 7 \times 9 + 9 \times 4 = \frac{\boxed{127}}{(80)(81)(82)}$$

である。