数チャレ 第231回(2020年4月)

有理数 a, b に対して，$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば a, b は整数であることを証明せよ。ただし，i は虚数単位である。

出典：2020年 千葉大学

解答

a, b は有理数であるから

$$a=\frac{s}{t},\quad t>0,\quad gcd(s,\ t)=1$$
$$b=\frac{u}{v},\quad v>0,\quad gcd(u,\ v)=1$$

を満たす整数 s, t, u, v が存在する。

$$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$$

の実部 $a^2-b^2=\dfrac{s^2v^2-t^2u^2}{t^2v^2}$ は整数であるから

$$t^2v^2 \mid s^2v^2-t^2u^2$$

特に $t^2 \mid s^2v^2-t^2u^2$ であるから

$$t^2 \mid s^2v^2$$

t と s は互いに素であるから

$$t^2 \mid v^2 \qquad \therefore\ t \mid v$$

同様にして，$v^2 \mid s^2v^2-t^2u^2$ より

$$v \mid t$$

$t>0$, $v>0$ より

$$t=v$$

である。

虚部 $2ab=2\cdot\dfrac{s}{t}\cdot\dfrac{u}{t}=\dfrac{2su}{t^2}$ は整数であるから

$$t^2 \mid 2su$$

su と $t^2\left(=v^2\right)$ は互いに素であるから

$$t^2 \mid 2$$

素数2は(1以外の)平方因数をもたないから

$$t=1$$

よって，$a=s$, $b=u$ は整数である。

(証明おわり)

ⓒ早稲田数学フォーラム