

数チャレ 第 232 回 (2020 年 5 月)

素数 p に対して,

$$S = \sum_{k=1}^{p-1} k, \quad T = \sum_{k=1}^{p-1} k^2$$

と定める。次の問いに答えよ。

- (1) S を p で割ったときの余りを求めよ。
- (2) T を p で割ったときの余りを求めよ。
- (3) 以下の性質 (*) が成り立たない素数 p をすべて求めよ。

(*) すべての整数 a, b, c に対して, $\sum_{k=1}^{p-1} (ak^3 + bk^2 + ck)$ は p で割り切れる。

出典：2020 年 横浜国立大学 理工学部・経済学部・経営学部

解答

- (1) 数列の和の公式より

$$S = \sum_{k=1}^{p-1} k = \frac{1}{2}p(p-1)$$

$p = 2$ のとき

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \text{ を } 2 \text{ で割った余りは } 1$$

p が奇素数であるとき

$$\frac{p-1}{2} \text{ は整数}$$

であるから,

$$S = p \cdot \frac{p-1}{2} \text{ を } p \text{ で割った余りは } 0$$

以上をまとめて, S を p で割ったときの余りは

$$\begin{cases} p = 2 \text{ のとき} & 1 \\ p \text{ が奇素数であるとき} & 0 \end{cases} \quad (\text{答})$$

- (2)

$$T = \sum_{k=1}^{p-1} k^2 = \frac{1}{6}p(p-1)(2p-1)$$

$p = 2$ のとき

$$T = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 1$$

$p = 3$ のとき

$$T = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 5 \equiv 2 \pmod{3}$$

$p \equiv 1 \pmod{6}$ のとき

$$\frac{1}{6}(p-1) \text{ は整数}$$

$p \equiv 5 \pmod{6}$ のとき

$$(p-1)(2p-1) \equiv 4 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{6}$$

以上をまとめて, T を p で割ったときの余りは

$$\begin{cases} p = 2 \text{ のとき} & 1 \\ p = 3 \text{ のとき} & 2 \\ p \neq 2, 3 \text{ のとき} & 0 \end{cases} \quad (\text{答})$$

(3) (1)より

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^3 = \frac{1}{4} p^2 (p-1)^2 = S^2$$

を p で割った余りは

$$p = 2 \text{ のとき } 1, \quad p \neq 2 \text{ のとき } 0$$

(2)とあわせて, $p \neq 2, 3$ のとき

$$\sum_{k=1}^{p-1} (ak^3 + bk^2 + ck) = a \sum_{k=1}^{p-1} k^3 + b \sum_{k=1}^{p-1} k^2 + c \sum_{k=1}^{p-1} k$$

は p で割り切れる。

$p = 3$ のとき

$$\sum_{k=1}^{p-1} (ak^3 + bk^2 + ck) \equiv 2b \pmod{3}$$

であるから, b が 3 で割り切れないときは $\sum_{k=1}^{p-1} (ak^3 + bk^2 + ck)$ は 3 で割り切れない。

$p = 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{p-1} (ak^3 + bk^2 + ck) \equiv a + b + c \pmod{2}$$

であるから, $a + b + c$ が奇数ならば $p = 2$ で割り切れない。

以上より,

(*) が成り立たない素数 p は $p = 2, 3$ (答)

ですべてである。