

数チャレ 第233回(2020年6月)

次の問いに答えよ。

- (1) a, b, n は自然数の定数で、 b は4の倍数ではなく、 $n \geq 2$ とする。
 a が 2^n の倍数であるが、 2^{n+1} の倍数ではないとき、 $a(a+b)$ 、 $2a(2a+b)$ のいずれかは、 2^{n+1} の倍数であるが、 2^{n+2} の倍数ではないことを示せ。
- (2) b は自然数の定数で、4の倍数ではないとする。
3以上の任意の自然数 n に対して、次をみたす自然数 a_n が存在することを示せ。

$\frac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$ は、小数第 n 位の数字が5である小数第 n 位までの有限小数で表される。

出典：2020年 東京慈恵会医科大学

解答

- (1) 2でちょうど何回割れるかを $v()$ で表すことにすると、 a は 2^n の倍数であるが、 2^{n+1} の倍数ではないから

$$v(a) = n, \quad v(2a) = n + 1$$

b は 2^2 の倍数ではないから

$$v(b) = 0 \text{ または } 1$$

$n \geq 2$ より、いずれの場合も $v(2a) > v(a) > v(b)$ であることに注意する。

- (i) $v(b) = 0$ のとき

$$v(a+b) = v(b) = 0, \quad v(2a+b) = v(b) = 0$$

であるから

$$v(a(a+b)) = v(a) + v(a+b) = n$$

$$v(2a(2a+b)) = v(2a) + v(2a+b) = n + 1$$

- (ii) $v(b) = 1$ のとき

$$v(a+b) = v(b) = 1, \quad v(2a+b) = v(b) = 1$$

であるから

$$v(a(a+b)) = v(a) + v(a+b) = n + 1$$

$$v(2a(2a+b)) = v(2a) + v(2a+b) = n + 2$$

以上より、 $v(a(a+b)) = n + 1$ と $v(2a(2a+b)) = n + 1$ の一方だけが成り立つ。
(証明おわり)

- (2) 5^n を10進表示すると1の位は5であり、任意の正の奇数 c に対して

$$5^n c \text{ の } 1 \text{ の位は } 5$$

であるから、

$\frac{c}{2^n} = \frac{5^n c}{10^n}$ は小数第 n 位が 5 である小数第 n 位までの有限小数

である。

3 以上の自然数 n に対して,

b が正の奇数のときは $a_n = 2^n$

b が 4 で割れない偶数のときは $a_n = 2^{n-1}$

と定めると, (1) の考察より

$$v(a_n(a_n + b)) = n$$

であるから,

$$a_n(a_n + b) = 2^n c \quad (c \text{ は正の奇数})$$

と表される。上で示したことより,

$$\frac{a_n(a_n + b)}{2^{2n}} = \frac{c}{2^n} = \frac{5^n c}{10^n}$$

は小数第 n 位が 5 である小数第 n 位までの有限小数である。

(証明おわり)