

数チャレ 第234回(2020年7月)

楕円 $C: 7x^2 + 10y^2 = 2800$ の有理点とは、 C 上の点でその x 座標、 y 座標がともに有理数であるものをいう。また、 C の整数点とは、 C 上の点でその x 座標、 y 座標がともに整数であるものをいう。整数点はもちろん有理点でもある。点 $P(-20, 0)$ 、 $Q(20, 0)$ は C の整数点である。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 a を傾きとする直線 $\ell_a: y = a(x + 20)$ と C の交点を求めよ。
- (2) (1) を用いて、 C の有理点は無数にあることを示せ。
- (3) C の整数点は P と Q のみであることを示せ。

出典：2020 年 中央大学 理工学部

解答

- (1) ℓ_a の式と C の式を連立して y を消去すると

$$\begin{aligned} 7x^2 + 10a^2(x + 20)^2 &= 2800 \\ (10a^2 + 7)x^2 + 400a^2x + 400(10a^2 - 7) &= 0 \\ (x + 20)\{(10a^2 + 7)x + 20(10a^2 - 7)\} &= 0 \\ \therefore x = -20, \frac{20(7 - 10a^2)}{7 + 10a^2} \end{aligned}$$

$y = a(x + 20)$ より y 座標も計算して、 $x = \frac{20(7 - 10a^2)}{7 + 10a^2}$ のとき

$$\begin{aligned} y &= a \left\{ \frac{20(7 - 10a^2)}{7 + 10a^2} + 20 \right\} \\ &= a \cdot \frac{20(7 - 10a^2) + 20(7 + 10a^2)}{7 + 10a^2} = \frac{280a}{7 + 10a^2} \end{aligned}$$

ℓ_a と C の交点は

$$(-20, 0), \left(\frac{20(7 - 10a^2)}{7 + 10a^2}, \frac{280a}{7 + 10a^2} \right) \quad (\text{答})$$

- (2) a が有理数であるとき、

$$\left(\frac{20(7 - 10a^2)}{7 + 10a^2}, \frac{280a}{7 + 10a^2} \right) \text{ は } C \text{ 上の有理点}$$

である。正の有理数 a, b について

$$\frac{20(7 - 10a^2)}{7 + 10a^2} = \frac{20(7 - 10b^2)}{7 + 10b^2} \quad \text{かつ} \quad \frac{280a}{7 + 10a^2} = \frac{280b}{7 + 10b^2}$$

が成り立つとすれば、 $7 - 10a^2 \neq 0$ のもと、

$$\frac{7 - 10b^2}{7 - 10a^2} = \frac{b}{a}$$

が必要であり，

$$\begin{aligned}a(7 - 10b^2) &= b(7 - 10a^2) \\ 10ab(a - b) + 7(a - b) &= 0 \\ (10ab + 7)(a - b) &= 0\end{aligned}$$

$10ab + 7 > 0$ より

$$a = b$$

対偶をとると，正の有理数 a, b が相異なるならば

$$\left(\frac{20(7 - 10a^2)}{7 + 10a^2}, \frac{280a}{7 + 10a^2} \right) \neq \left(\frac{20(7 - 10b^2)}{7 + 10b^2}, \frac{280b}{7 + 10b^2} \right)$$

正の有理数は無数にあるから， C 上の $y > 0$ の部分には有理点が無数にある。

C 上全体においても，有理点は無数にある。 (証明おわり)

(3) $P(-20, 0), Q(20, 0)$ 以外に C の整数点 (格子点)

$$\left(\frac{20(7 - 10a^2)}{7 + 10a^2}, \frac{280a}{7 + 10a^2} \right) \quad (a \text{ は } 0 \text{ でない有理数})$$

があるとする。 $\left(\frac{20(7 - 10a^2)}{7 + 10a^2}, \frac{-280a}{7 + 10a^2} \right)$ も C 上の整数点 (格子点) となるから，

$$a > 0$$

のときだけ考えればよい。 a は有理数であるから

$$a = \frac{n}{m} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数})$$

と表され，

$$\begin{aligned}\frac{20(7 - 10a^2)}{7 + 10a^2} &= \frac{20(7m^2 - 10n^2)}{7m^2 + 10n^2} \\ &= 20 \left(\frac{14m^2}{7m^2 + 10n^2} - 1 \right) \\ &= 20 \left(1 - \frac{20n^2}{7m^2 + 10n^2} \right)\end{aligned}$$

は整数であるから，

$$7m^2 + 10n^2 \text{ は } \gcd(20 \cdot 14m^2, 20 \cdot 20n^2) = 40 \text{ の約数}$$

ということになる。

ところが，自然数 m, n を用いて $7m^2 + 10n^2$ と表される 40 以下の整数は

$$7 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1^2 = 17, \quad 7 \cdot 2^2 + 10 \cdot 1^2 = 38$$

のみであり，いずれも 40 の約数にはならないから矛盾する。

ゆえに， C 上にある整数点 (格子点) は P と Q のみである。 (証明おわり)

(注) 本問で定義された整数点は，「格子点」が正式な用語である。「有理点」は正式な用語を用いているので，意図は不明である。