

数チャレ 第235回 (2020年8月)

n を自然数とし, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする。

- (1) I_n と I_{n+2} の関係式を導け。
 (2) $\frac{4^{n-1}}{I_{2n-1}}$ は整数であることを示せ。

解答

- (1) 部分積分法により

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x (-\sin x) dx \\ &= \left[-\sin^{n+1} x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \sin^n x \cos x \cdot \cos x dx \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \\ \therefore I_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2} I_n \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

(1)を用いて

$$\begin{aligned} I_{2n-1} &= \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} I_1 \\ &= \frac{2^{n-1} \cdot (n-1)!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \\ &= \frac{\{2^{n-1} \cdot (n-1)!\}^2}{(2n-1)!} \\ &= \frac{4^{n-1}}{2n-1} \cdot \frac{(n-1)!(n-1)!}{(2n-2)!} \\ &= \frac{4^{n-1}}{(2n-1) {}_{2n-2}C_{n-1}} \quad (n=1 \text{ のときは } {}_{2n-2}C_{n-1} = 1) \end{aligned}$$

したがって, 任意の自然数 n に対して

$$\frac{4^{n-1}}{I_{2n-1}} = (2n-1) {}_{2n-2}C_{n-1}$$

は整数である。

(証明おわり)