

## 数チャレ 第236回(2020年9月)

- (1)  $[\sqrt{n}] = 2021$  を満たし, 2021 で割り切れるような自然数  $n$  をすべて求めよ。  
(2) 2021 以下の自然数  $n$  のうち,  $[\sqrt{n}]$  で割り切れるものの総和  $S$  を求めよ。

解答

$[\sqrt{n}] = k$  とおくと

$$k \leq \sqrt{n} < k+1$$

$$k^2 \leq n < (k+1)^2$$

であるから,  $k$  で割り切れる  $n$  は

$$k^2, k(k+1), k(k+2), \dots$$

であるが,

$$(k+1)^2 - k(k+2) = 1$$

であるから,  $k$  を固定すると

$$n = k^2, k(k+1), k(k+2)$$

の3つに限られる。

- (1)  $k = 2021$  のとき,  $2021^2$ ,  $2021 \times 2022$ ,  $2021 \times 2023$  を計算して  
 $n = 2084441, 4086462, 4088483$  (答)

- (2)  $44^2 = 1936$ ,  $45^2 = 2025$  より

$$44^2 < 44 \cdot 45 = 1980 < 2021 < 45^2 - 1 = 44 \cdot 46$$

であるから, 求める総和  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{43} \{k^2 + k(k+1) + k(k+2)\} + 44^2 + 44 \cdot 45 \\ &= \sum_{k=1}^{43} 3k(k+1) + 1936 + 1980 \\ &= \sum_{k=1}^{43} \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} + 3916 \\ &= 43 \cdot 44 \cdot 45 + 3916 \\ &= 85140 + 3916 \\ &= 89056 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$