

数チャレ 第237回(2020年10月)

次の命題が成立しないような正の実数 x を求めよ。

x 以下の素数の個数が $\frac{x}{2}$ より小さい。………… (*)

解答

$0 < x < 2$ のとき、 x 以下の素数は存在しないから、命題(*)は成立する。

1桁の素数が2, 3, 5, 7であるから、次のように場合分けして考える。

(i) $x = 2, 4, 6, 8$ のとき、 x 以下の素数はちょうど $\frac{x}{2}$ 個である。

(ii) $x = 3, 5, 7$ のとき、 x 以下の素数は $\frac{x+1}{2}$ 個 ($> \frac{x}{2}$) である。

(iii) $x = 2n$ (n が5以上の整数) のとき

x 以下の正の奇数は n 個であるから、素数でない1と素数2を取り替えれば、 x 以下の素数は n 個以下である。ところが、少なくとも9は素数でないから、 x 以下の素数は n 個より少ない。

(ii) $x = 2n+1$ (n が4以上の整数) のとき

x 以下の正の奇数は $n+1$ 個であるから、(iii)と同様に考えて、素数の個数は n 個以下であり、

$$n < n + \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

が成り立つ。

(v) x が整数でない(正の実数である)とき

$$x-1 < [x] < x$$

であるから、(i)~(iv)で調べたことにより、 x 以下の素数の個数 N は

$$[x] \neq 3, 5, 7 \text{ のとき } N \leq \frac{[x]}{2} < \frac{x}{2}$$

$$[x] = 3, 5, 7 \text{ のとき } N = \frac{[x]+1}{2} > \frac{(x-1)+1}{2} = \frac{x}{2}$$

である。

以上の考察をまとめて、命題(*)が成立しない正の実数 x は

$$x = 2, 3 \leq x \leq 4, 5 \leq x \leq 6, 7 \leq x \leq 8 \quad (\text{答})$$