

数チャレ 第238回(2020年11月)

- (1) 方程式 $2021x + 3y = 1$ の整数解を求めよ。
(2) $2021x + 3y = n$ を満たす整数の組 (x, y) のうち, x, y がともに正であるものがただ一つ存在するような最大の整数 n を求めよ。

解答

$$(1) \quad 2021x + 3y = 1 \quad \dots\dots ①$$

$2021 = 3 \times 674 - 1$ より

$$2021 \times (-1) + 3 \times 674 = 1 \quad \dots\dots ②$$

① - ② より

$$2021(x + 1) + 3(y - 674) = 0$$

$$\therefore 2021(x + 1) = 3(674 - y)$$

②より 2021 と 3 は互いに素であるから

$$x + 1 = 3k, \quad 674 - y = 2021k$$

を満たす整数 k が存在し, ①の整数解は

$$(x, y) = (3k - 1, -2021k + 674) \quad (k \text{ は整数}) \quad (\text{答})$$

- (2) (1)と同様にして, n が正の整数であるとき, 方程式

$$2021x + 3y = n \quad \dots\dots ③$$

の整数解は

$$(x, y) = (3k - n, -2021k + 674n) \quad (k \text{ は整数})$$

であることがわかる。

(a, b) を ③のただ 1 つの正の整数解とすれば,

$$(a + 3, b - 2021) \text{ について } b - 2021 \leq 0$$

$$(a - 3, b + 2021) \text{ について } a - 3 \leq 0$$

であるから

$$a \leq 3 \quad \text{かつ} \quad b \leq 2021$$

$a = 3, b = 2021$ のときを考えて, ③の正の整数解がただ 1 つ存在するような最大の整数は

$$n = 2021 \cdot 3 + 3 \cdot 2021 = 12126 \quad (\text{答})$$

である。

(注) $n \leq 12126$ のどの自然数 n でも, ③の正の整数解がただ 1 つというわけではない。たとえば, 方程式 $2021x + 3y = 8087$ は $(x, y) = (1, 2022), (4, 1)$ を解に持つ。