

数チャレ 第239回 (2020年12月)

自然数 n に対して、整数値関数 $f(n)$ を

$$\sum_{d|n} f(d) = n$$

により定める。ただし、 $\sum_{d|n}$ は n の正の約数 d すべてにわたる和を表す。

(1) p を素数、 e を正の整数とすると、 $f(p^e)$ を求めよ。

(2) p を素数、 e を正の整数、 n を p で割れない自然数とすると、

$$f(p^e n) = f(p^e) f(n)$$

が成り立つことを示せ。

(3) $f(n)$ は 1 以上 n 以下の n と互いに素な整数の個数に等しいことを示せ。

解答

(1) $f(n)$ の定め方より

$$f(1) + f(p) + f(p^2) + \cdots + f(p^{e-1}) + f(p^e) = p^e$$

$$f(1) + f(p) + f(p^2) + \cdots + f(p^{e-1}) = p^{e-1}$$

であるから、差をとると

$$f(p^e) = p^e - p^{e-1} = p^{e-1}(p-1) \quad (\text{答})$$

(2) $n=1$ のとき、 $f(1)=1$ より

$$f(p^e) = f(p^e) f(1)$$

が成り立つ。

$n \geq 2$ として、

$$m \leq n-1 \text{ では } m \text{ が素数 } p \text{ で割れないならば } f(p^e m) = f(p^e) f(m)$$

であるとする。

$$p^e n \text{ の正の約数は } p^k d \quad (0 \leq k \leq e, d|n)$$

と表されるから、 $f(n)$ の定め方より

$$\begin{aligned} p^e n &= \sum_{k=0}^e \sum_{d|n} f(p^k d) \\ &= \sum_{k=0}^{e-1} \sum_{d|n} f(p^k d) + \sum_{d|n} f(p^e d) \\ &= p^{e-1} n + \sum_{d|n, d < n} f(p^e d) + f(p^e n) \end{aligned}$$

$d < n$ のとき、仮定より

$$f(p^e d) = f(p^e) f(d)$$

であり、(1)より

$$p^e - p^{e-1} = f(p^e)$$

であるから、 $f(n)$ の定め方にも注意して

$$\begin{aligned}
f(p^e n) &= p^e n - p^{e-1} n - \sum_{d|n, d < n} f(p^e d) \\
&= f(p^e) n - \sum_{d|n, d < n} f(p^e) f(d) \\
&= f(p^e) \sum_{d|n} f(d) - \sum_{d|n, d < n} f(p^e) f(d) \\
&= f(p^e) f(n)
\end{aligned}$$

数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $f(p^e n) = f(p^e) f(n)$ が成り立つ。
(証明おわり)

(3) $f(n)$ は 1 以上 n 以下の n と互いに素な整数の個数に等しい …… (*)
ことを数学的帰納法で示す。

$f(1) = 1$ については，(*) は正しい。

$1 \leq k < n$ であるすべての自然数 k に対して (*) が正しいとすれば，特に
 n より小さい n の正の約数 d に対して $f(d)$ は (*) を満たす

が，言い換えると

$f(d)$ は 1 以上 n 以下の整数で n との最大公約数が $\frac{n}{d}$ であるものの個数

を表すから，

$\sum_{d|n, d < n} f(d)$ は 1 以上 n 以下で n との最大公約数が 2 以上の整数の個数

であり， $f(n) = n - \sum_{d|n, d < n} f(d)$ は (*) を満たす。

よって，すべての自然数 n に対して (*) が成り立つ。(証明おわり)

(注) 通常は，1 以上 n 以下の n と互いに素な整数の個数を $\varphi(n)$ で表し，オイラー関数という。その定義から始めて

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

が導かれるが，本問ではその逆問題になっている。