

数チャレ 第240回(2021年1月)

(1) 方程式

$$x^2 - y^2 = 2021$$

を満たす正の整数の組 (x, y) を求めよ。

(2) 方程式

$$(a^2 + b^2)(c^2 - d^2) = 2021$$

を満たす正の整数 a, b, c, d は存在しないことを示せ。

解答 (1) 与えられた方程式は

$$(x + y)(x - y) = 2021 = 43 \times 47$$

と書ける。 $x + y > x - y > 0$ であることを考えると

$$(x + y, x - y) = (2021, 1), (47, 43)$$

に限られ、

$$(x, y) = (1011, 1010), (45, 2) \quad (\text{答})$$

(2) $(a^2 + b^2)(c^2 - d^2) = 2021$ を満たす正の整数 a, b, c, d があるとすれば、

$$a^2 + b^2 = 1, 43, 47, 2021$$

のいずれかであるが、 $a^2 + b^2 \geq 2$ および平方数を4で割った余りは0または1であるから

$$a^2 + b^2 = 2021$$

の場合に限られる。このとき

$$c^2 + d^2 = (c + d)(c - d) = 1$$

となるが、

$$c + d > c - d > 0$$

であるから、成り立たない。

ゆえに、 $(a^2 + b^2)(c^2 - d^2) = 2021$ を満たす正の整数 a, b, c, d は存在しないことが示された。 (おわり)

(注) 整数論の専門的な定理によると、 $a^2 + b^2$ の素因数は2つの平方数の和で表される素数だけで構成される。2021の素因数が43, 47であることから

$$a^2 + b^2 = 2021$$

の時点で矛盾することがわかるのだが、上の解答は中高生や専門外の人も読むことを考えて書かれている。定理を知らなくても解ける方針が見えるように

$$(a^2 + b^2)(c^2 - d^2) = 2021$$

の形で出題したが、(1)につられて

$$c^2 - d^2 = 1, 43, 47, 2021$$

に注目して先に c, d を求めると、作業量は多くなる。