

数チャレ 第241回(2021年2月)

次の問いに答えよ。

- (1) 整数 n , r が $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n$ を満たすとする。このとき, $r \cdot {}_n C_r = n \cdot {}_{n-1} C_{r-1}$ が成り立つことを示せ。
- (2) p を素数とし, 整数 r が $1 \leq r \leq p-1$ を満たすとする。このとき, ${}_p C_r$ が p で割り切れることを示せ。
- (3) p を 3 以上の素数とする。二項定理を用いた式 $(x+1)^p = \sum_{r=0}^p {}_p C_r x^r$ を利用して, 2^p を p で割った余りが 2 であることを示せ。
- (4) p を 5 以上の素数とする。 3^p を p で割った余りを求めよ。

出典：2011 年 佐賀大学 農学部

解答

- (1) 組合せの定義より

$$r \cdot {}_n C_r = r \cdot \frac{{}_n P_r}{r!} = r \cdot \frac{n \cdot {}_{n-1} P_{r-1}}{r \cdot (r-1)!} = n \cdot \frac{{}_{n-1} P_{r-1}}{(r-1)!} = n \cdot {}_{n-1} C_{r-1}$$

(おわり)

- (2) (1)を用いると

$${}_p C_r = \frac{p \cdot {}_{p-1} C_{r-1}}{r}$$

が成り立つ。 ${}_p C_r$ は整数であるから, 整数 $p \cdot {}_{p-1} C_{r-1}$ は r で割り切れる。

$1 \leq r \leq p-1$ より r と素数 p は互いに素であるから, ${}_{p-1} C_{r-1}$ が r で割り切れ,

$$\frac{{}_{p-1} C_{r-1}}{r} \text{ は整数}$$

である。よって,

$${}_p C_r = p \cdot \frac{{}_{p-1} C_{r-1}}{r}$$

は p で割り切れる。 (おわり)

- (3) 二項定理より

$$2^p = (1+1)^p = 1 + \sum_{r=1}^{p-1} {}_p C_r \cdot 1^r + 1^p = 2 + \sum_{r=1}^{p-1} {}_p C_r$$

(2) より $\sum_{r=1}^{p-1} {}_p C_r$ は p で割り切れるから, 2^p を p で割った余りは 2 である。

(おわり)

(4) 二項定理より

$$3^p = (2+1)^p = 1 + \sum_{r=1}^{p-1} {}_p C_r \cdot 2^r + 2^p$$

であるから, (2), (3) より

$$3^p \equiv 1 + 0 + 2 \pmod{p}$$

$p \geq 5$ (> 3) より,

3^p を p で割った余りは 3 (答)