

数チャレ 第242回(2021年3月)

i を虚数単位とする．以下の問に答えよ．

- (1) $n = 2, 3, 4, 5$ のとき $(2+i)^n$ を求めよ．またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ．
- (2) n を正の整数とするととき $(2+i)^n$ は虚数であることを示せ．

出典：2021 年 神戸大学

解答

$$\begin{aligned}(1) \quad (2+i)^2 &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot i + i^2 = 3 + 4i \quad (\text{答}) \\ (2+i)^3 &= (3+4i)(2+i) = 2 + 11i \quad (\text{答}) \\ (2+i)^4 &= (2+11i)(2+i) = -7 + 24i \quad (\text{答}) \\ (2+i)^5 &= (-7+24i)(2+i) = -38 + 41i \quad (\text{答})\end{aligned}$$

$(2+i)^n$ ($n = 2, 3, 4, 5$) の虚部を 10 で割った余りは

$$\begin{cases} n = 2, 4 \text{ のとき} & 4 \\ n = 3, 5 \text{ のとき} & 1 \end{cases} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad (2+i)^2 - 1 = (3+4i) - 1 = 2 + 4i = 2i(2-i)$$

であるから、 $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}(2+i)^{n+2} - (2+i)^n &= (2+i)\{(2+i)^2 - 1\}(2+i)^{n-1} \\ &= 2i(2-i)(2+i)(2+i)^{n-1} \\ &= 10i(2+i)^{n-1}\end{aligned}$$

よって、

$$n \text{ が奇数のとき } (2+i)^n \equiv 2+i \pmod{10}$$

$$n \text{ が偶数のとき } (2+i)^n \equiv 3+4i \pmod{10}$$

であり、特に $(2+i)^n$ は虚数である。

(証明おわり)