

数チャレ 第243回(2021年4月)

次の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して

$$6^{6n} - 1$$

は 31 の倍数であることを示せ。

- (2) ℓ, m は自然数で, $15 \leq \ell \leq 18, 25 \leq m \leq 27$ を満たすとする。このとき

$$2^\ell + 6^m - 7$$

が 31 の倍数となるような自然数の組 (ℓ, m) をすべて求めよ。

出典：2021 年 弘前大学

解答

- (1) $6^6 - 1 = 216^2 - 1 = 215 \times 217 = 215 \times (7 \times 31)$

は 31 の倍数であるから,

$$6^{6n} - 1 = (6^6 - 1)(6^{6(n-1)} + 6^{6(n-2)} + \cdots + 6^6 + 1)$$

は 31 の倍数である。

(証明おわり)

- (2) 2^ℓ については

$$2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 8, 2^4 \equiv 16, 2^5 \equiv 1 \pmod{31}$$

6^m については

$$6^1 \equiv 6 \pmod{31}$$

$$6^2 \equiv 36 \equiv 5 \pmod{31}$$

$$6^3 \equiv 5 \times 6 \equiv 30 \pmod{31}$$

$$6^4 \equiv 30 \times 6 \equiv 25 \pmod{31}$$

$$6^5 \equiv 25 \times 6 \equiv 26 \pmod{31}$$

$$6^6 \equiv 1 \pmod{31} \quad ((1)\text{より})$$

であるから, $2^\ell + 6^m$ を 31 で割った余りが 7 となる組合せは

$$2 + 5, 8 + 30, 1 + 6$$

に限られる。

$2^\ell \equiv 2 \pmod{31}, 6^m \equiv 5 \pmod{31}$ となるのは

$$\ell \equiv 1 \pmod{5}, m \equiv 2 \pmod{6},$$

$2^\ell \equiv 8 \pmod{31}, 6^m \equiv 30 \pmod{31}$ となるのは

$$\ell \equiv 3 \pmod{5}, m \equiv 3 \pmod{6},$$

$2^\ell \equiv 1 \pmod{31}, 6^m \equiv 6 \pmod{31}$ となるのは

$$\ell \equiv 0 \pmod{5}, m \equiv 1 \pmod{6}$$

のときであるから,

$15 \leq \ell \leq 18, \quad 25 \leq m \leq 27$
において $2^\ell + 6^m - 7$ が 31 の倍数となるのは
 $(\ell, m) = (16, 26), (18, 27), (15, 25)$ (答)
のときですべてである。