数チャレ 第244回(2021年5月)

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n が 6 と互いに素であるとき，n^2 を 24 で割った余りは 1 であることを示せ。

(2) $p^2-1=24q$ を満たす素数 p と素数 q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

出典：2021 年 奈良女子大学 理学部

解答

(1) n を 6 で割って

$$n=6q+r \quad (q,\ r \text{ は整数},\ 0 \leqq r < 6)$$

と表すと，n と 6 は互いに素であるから

$$r=1 \text{ または } 5$$

であり，

$$n^2=(6q+r)^2=36q^2+12qr+r^2=12q(3q+r)+r^2$$

q が奇数のとき，$3q$ は奇数で，$3q+r$ は偶数となるから，

$$q \text{ の偶奇によらず } q(3q+r) \text{ は偶数}$$

である。

$$1^2=1,\quad 5^2=24+1$$

であるから，$n^2=12q(3q+r)+r^2$ を 24 で割った余りは 1 である。

(証明おわり)

(2) $p=2$ とすると

$$p^2-1=24q \geqq 24\times 2$$

は成り立たないから，

$$p \text{ は奇素数}$$

である。特に，$p-1,\ p+1$ はともに偶数で

$$(p+1)-(p-1)=2$$

であるから

$$p+1 \text{ と } p-1 \text{ の最大公約数は } 2$$

である。

$$(p+1)(p-1)=2^3\cdot 3\cdot q,\quad 0<p-1<p+1$$

であるから，$q=2$ のとき

$$(p+1,\ p-1)=(24,\ 2),\ (8,\ 6)$$

$q=3$ のとき

$$(p+1,\ p-1)=(18,\ 4),\ (36,\ 2)$$

ⓒ 早稲田数学フォーラム

q が 3 以外の奇素数のとき

$$(p+1,\ p-1)=(12q,\ 2),\ (4q,\ 6),\ (6q,\ 4),\ (12,\ 2q),\ (2q,\ 12)$$

以上の 8 組について，$(p+1)-(p-1)=2$ も考えると

$$(q,\ p+1,\ p-1)=(2,\ 8,\ 6),\ (5,\ 12,\ 10),\ (7,\ 14,\ 12)$$

の場合に限られ，p が奇素数であることも確認して

$$(p,\ q)=(7,\ 2),\ (11,\ 5),\ (13,\ 7)\quad (答)$$

ⓒ 早稲田数学フォーラム