数チャレ 第245回(2021年6月)

座標平面上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ について，$x,\ y$ がともに有理数であるとき，Q を有理点という。

(1) P を曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点とする。P を通る傾き 1 の直線と x 軸の交点が有理点ならば，P も有理点であることを示せ。

(2) r を正の実数とする。曲線 $x^2-y^2=1$ 上の有理点のうち，原点との距離が r より大きいものがあることを示せ。

(3) 曲線 $x^2-6y^2=7$ 上に有理点がないことを示せ。

出典：2021 年 滋賀医科大学

解答

(1) 仮定より，曲線

$$x^2-y^2=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

と有理点 $(q,\ 0)$ を通る直線

$$y=x-q \qquad \cdots\cdots ②$$

との交点が点 P であると考えられる。①かつ②より y を消去して

$$x^2-(x-q)^2=1$$
$$2qx-q^2=1$$
$$2qx=q^2+1 \qquad \therefore\ x=\frac{q^2+1}{2q}$$

②より

$$y=\frac{q^2+1}{2q}-q=\frac{1-q^2}{2q}$$

有理数は加減乗除について閉じているから，点

$$\mathrm{P}\left(\frac{1+q^2}{2q},\ \frac{1-q^2}{2q}\right)$$

は有理点である。 (証明おわり)

(2) 曲線 $x^2-y^2=1$ 上の有理点 $\mathrm{P}\left(\frac{1+q^2}{2q},\ \frac{1-q^2}{2q}\right)$ について，原点 O からの距離の平方は

$$\mathrm{OP}^2=\frac{(1+q^2)^2+(1-q^2)^2}{(2q)^2}=\frac{2(q^4+1)}{4q^2}=\frac{1}{2}\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)$$

であり，$q \geqq 2r$ のとき

ⓒ 早稲田数学フォーラム

$$\mathrm{OP} > \sqrt{\frac{1}{2}\left\{(2r)^2 + 0^2\right\}} = \sqrt{2}\,r > r$$

よって，曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の有理点で，原点との距離が r より大きいものがある。

(証明おわり)

(3) 曲線 $x^2 - 6y^2 = 7$ 上に有理点があるとすれば，

$$a^2 - 6b^2 = 7c^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

を満たす自然数 a, b, c が存在する。ここで，b と c の最大公約数を d とすると，

$$a = da_1, \quad b = db_1, \quad c = dc_1$$

を満たす自然数 a_1, b_1, c_1 が存在して，

$${a_1}^2 - 6{b_1}^2 = 7{c_1}^2$$

が成り立つ。b_1 と c_1 は互いに素であるから，はじめから

b と c は互いに素

であると仮定して示せばよい。

隣り合う整数の一方は偶数であるから，整数 n に対して

$$(2n-1)^2 = 4n(n-1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$$

n が奇数のとき

$$(2n)^2 = 4n^2 \equiv 4 \pmod 8$$

n が偶数のとき

$$(2n)^2 = 4n^2 \equiv 0 \pmod 8$$

奇数，4 で割れない偶数，4 の倍数ですべての整数の場合が尽くされるから，

平方数を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれか

である。このことを用いて b^2, c^2, $6b^2 + 7c^2$ を 8 で割った余りを調べると，

b^2	c^2	$6b^2 + 7c^2$
0	0	0
0	1	7
0	4	4
1	0	6
1	1	5
1	4	2
4	0	0
4	1	7
4	4	4

ですべての場合が尽くされる。a^2 を 8 で割った余りが 0, 1, 4 のいずれかであることから，③を満たすには

b と c はともに偶数

でなければならないが，これは b と c が互いに素であることに反する。

よって，曲線 $x^2 - 6y^2 = 7$ 上には有理点はない。 (証明おわり)

ⓒ 早稲田数学フォーラム