

数チャレ 第246回(2021年7月)

- (1) a, b, c, d, e は与えられた正の実数であるとする。 $\frac{an+b}{cn^2+dn+e}$ が整数となるような正の整数 n は、(0 個の場合も含めて) 有限個しかないことを示せ。
- (2) 整数から成る数列 $\{a_n\}$ の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が収束するならば、その極限值も整数であることを示せ。

解答

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{cn^2+dn+e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{n}}{cn + d + \frac{e}{n}} = 0 \text{ であり, つねに } \frac{an+b}{cn^2+dn+e} > 0$$

であるから、整数となるには

$$\frac{an+b}{cn^2+dn+e} \geq 1 \text{ が必要}$$

である。このとき、

$$an+b \geq cn^2+dn+e$$

$$cn^2 + (d-a)n + e - b \leq 0$$

$$c\left(n + \frac{d-a}{2c}\right)^2 - \frac{(d-a)^2}{4c} + e - b \leq 0 \quad \dots\dots (*)$$

– $(d-a)^2 + 4c(e-b) > 0$ のとき、不等式(*)を満たす(正の)整数は存在しない。

– $(d-a)^2 + 4c(e-b) = 0$ のとき、不等式(*)は

$$n + \frac{d-a}{2c} = 0$$

と同値であり、(*)を満たす正の整数 n は 0 個または 1 個である。

– $(d-a)^2 + 4c(e-b) < 0$ のとき、

$$cn^2 + (d-a)n + e - b = c(n-\alpha)(n-\beta) \quad (\alpha < \beta)$$

と表され、不等式(*)を満たす正の整数 n は

$$\alpha \leq n \leq \beta$$

の範囲にあり、 $[\beta] - [\alpha] + 1$ 個以下(有限個)である。

したがって、 $\frac{an+b}{cn^2+dn+e}$ が整数となるような正の整数 n は有限個しかない。

(証明おわり)

(注) 上の解答では、2 次不等式を丁寧に処理しているが、実は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{cn^2+dn+e} = 0$$

を導いた時点で、 $\frac{an+b}{cn^2+dn+e} \geq 1$ となる正の整数 n は有限個しかない。

ε - δ 論法 (もしくは ε - N 論法) になじみのない中高生のために補足すると,
 $\frac{an+b}{cn^2+dn+e} \geq 1$ となる正の整数 n が無数にあるとすれば, 正の整数 N をいくら大きくしても $\frac{an+b}{cn^2+dn+e} \geq 1$, $n \geq N$ を満たす正の整数 n が存在することになり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{cn^2+dn+e}$ が 0 には収束しないことになる。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とおく。

α が整数でないとすれば,

$$[\alpha] < \alpha < [\alpha] + 1$$

であるが,

$$\varepsilon = \min\{\alpha - [\alpha], [\alpha] + 1 - \alpha\}$$

とおくと,

$$[\alpha] \leq \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leq [\alpha] + 1$$

が成り立つ。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ より

$$|a_n - \alpha| \geq \varepsilon \text{ を満たす正の整数 } n \text{ は有限個}$$

しかないから, $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$ を満たす n の最大値 N が存在し,

$$n > N \text{ ならばつねに } [\alpha] < a_n < [\alpha] + 1$$

が存在する。

ところが, $[\alpha]$ と $[\alpha] + 1$ は隣り合う整数であるから, a_n が整数であることと矛盾する。

ゆえに, 極限值 α は整数である。

(証明おわり)

(注) 収束する有理数列の極限值は必ずしも有理数ではない。例えば, 漸化式

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}$ の各項は有理数であるが,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$$

は有理数ではない。