## 数チャレ 第247回(2021年8月)

(1) 
$$k \ge 1$$
 のとき  $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$  が成り立つことを示せ。

(2) 
$$\sum_{k=1}^{2021} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
 の整数部分を求めよ。

## 解答

(1) 
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$
 とおくと,
$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}, \quad f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} > 0$$

より,曲線y = f(x)は下に凸である。よって,領域

$$k \le x \le k+1, \quad 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

は 4 点 $\left(k,\ \frac{1}{\sqrt{k}}\right),\ \left(k+1,\ \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right),\ (k+1,\ 0),\ (k,\ 0)$  を頂点とする台形に含まれるから,面積を比べると

$$\int_{k}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

(証明おわり)

$$89.5^2 = 8010.25 < 8088 < 90^2, \quad 0 < \frac{1}{2\sqrt{2022}} < \frac{1}{\sqrt{100}} = 0.1$$
 لانا

$$88 < \sqrt{8088} - \frac{3}{2} < 88.6$$
 ..... ②

$$f'(x)=-rac{1}{2}x^{-rac{3}{2}}<0$$
 より  $f(x)=rac{1}{\sqrt{x}}$  は減少関数であるから  $k\geqq 2$  のとき  $rac{1}{\sqrt{k}}<\int_{k=1}^krac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 

$$\sum_{k=1}^{2021} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{2021} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$< 1 + \sum_{k=2}^{2021} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 1 + \int_{1}^{2021} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 1 + \left[ 2\sqrt{x} \right]_{1}^{2021}$$

$$= 1 + 2(\sqrt{2021} - 1)$$

$$= \sqrt{8084} - 1$$

$$89^2 = 7921 < 8084 < 90^2$$
より  $88 < \sqrt{8084} - 1 < 89$ 

①, ②, ③, ④より

$$88 < \sum_{k=1}^{2021} \frac{1}{\sqrt{k}} < 89$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{2021} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
 の整数部分は 88 (答)

(注) 
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx < \frac{1}{\sqrt{k}}$$
 により  $\int_1^{2022} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx < \sum_{k=1}^{2021} \frac{1}{\sqrt{k}}$  と評価すると,  $87 < \int_1^{2022} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx < 88$ 

であるから, 求める整数部分が87なのか88なのかが特定できない。 ちなみに, 上からの評価も(接線により)厳しくすると

$$\sum_{k=1}^{2021} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{2021} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2021+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \left[ 2\sqrt{x} \right]_{\frac{1}{2}}^{2021+\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2021 + \frac{1}{2}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{8086} - \sqrt{2}$$

$$89.5^2 = 8010.25 < 8086 < 90^2, 1.4^2 < 2 < 1.5^2$$
より  $88 < \sqrt{8086} - \sqrt{2} < 88.6$ 

となって、④より少しだけ厳しい評価になる。

 $\cdots$   $\bigcirc$