数チャレ 第248回(2021年9月)

n を自然数，i を虚数単位として，$x_n = \dfrac{(3+i)^n + (3-i)^n}{2}$ とおく。

(1) 任意の自然数 n に対して，x_n は整数であることを示せ。

(2) x_n を 10 で割った余りを求めよ。

解答

(1) x_n は $(3+i)^n$ の実部である。二項定理より

$$(3+i)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot 3^{n-k} \cdot i^k$$

${}_n\mathrm{C}_k$ は整数であるから，

$$x_n = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}_n\mathrm{C}_{2j} \cdot 3^{n-2j} \cdot (-1)^j \text{ は整数}$$

である。 (証明おわり)

(注) $\{x_n\}$ についての整数係数漸化式

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - 10x_n$$

を導いた上で，数学的帰納法を用いて示してもよい。

(2)

$$x_1 = 3$$

$$(3+i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot i + i^2 = 8 + 6i$$

$(3+i)^n$ の虚部を y_n とおくと，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n + (y_{n+1} - y_n)i &= (3+i)^{n+1} - (3+i)^n \\ &= (3+i)^{n-2}(3+i)^2(3+i-1) \\ &= (3+i)^{n-2}(8+6i)(2+i) \\ &= (3+i)^{n-2}(10+20i) \\ &= 10(1+2i)(3+i)^{n-2} \end{aligned}$$

において実部を比べると

$$x_{n+1} - x_n \equiv 0 \pmod{10}$$

ゆえに，x_n を 10 で割った余りは

$n = 1$ のとき 3，$n \geqq 2$ のとき 8 (答)

© 早稲田数学フォーラム