

数チャレ 第249回 (2021年10月)

- (1) $4x^2y^2 - 7x^2 + y^2 + 1 = 0$ を満たす整数 x, y は存在しないことを示せ。
(2) $4x^2y^2 - 5x^2 + 3y^2 + 1 = 0$ を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

解答

- (1) $4x^2y^2 - 7x^2 + y^2 + 1 = 0$ を変形すると

$$x^2(4y^2 - 7) + y^2 = -1$$

$y \geq 2$ のとき $4y^2 - 7 > 0$ であり、左辺は 0 以上であるから、この等式が成り立つとすれば、

$$y^2 = 0 \text{ または } 1$$

のときに限られる。

$$y^2 = 0 \text{ のとき } 7x^2 = 1, \quad y^2 = 1 \text{ のとき } 3x^2 = 2$$

となるが、いずれも素因数分解の一意性に反する。

よって、 $4x^2y^2 - 7x^2 + y^2 + 1 = 0$ を満たす整数 x, y は存在しない。

(証明おわり)

- (2) $4x^2y^2 - 5x^2 + 3y^2 + 1 = 0$ を変形すると

$$4\left(x^2y^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{5}{4}x^2\right) + 1 = 0$$

$$4\left\{\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(y^2 - \frac{5}{4}\right) + \frac{15}{16}\right\} = -1$$

ここで、 $y \geq 2$ とすれば $y^2 - \frac{5}{4} > 0$ であり、左辺は正、右辺は負となって矛盾するから、方程式を満たす自然数 y は

$$y = 1$$

に限られる。このとき

$$4x^2 - 5x^2 + 3 + 1 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\therefore x = 2$$

以上より、求める自然数の組は

$$(x, y) = (2, 1) \quad (\text{答})$$