

数チャレ 第250回 (2021年11月)

a, b, c が整数であるとき, 次を示せ。

- (1) $a^2 + 2b^2$ が 5 の倍数ならば, a と b はともに 5 の倍数である。
(2) $5(a^2 + 2b^2) = 3c^2$ が成り立つならば, $a = b = c = 0$ である。

解答

- (1) 整数を 5 で割った余りは 0, 1, 2, 3, 4 のいずれかであり,

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9 \equiv 4 \pmod{5}, \quad 4^2 = 16 \equiv 1 \pmod{5}$$

であるから,

平方数を 5 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれか

である。

a^2, b^2 , および $a^2 + 2b^2$ を 5 で割った余りは,

a^2	b^2	$a^2 + 2b^2$
0	0	0
0	1	2
0	4	3
1	0	1
1	1	3
1	4	4
4	0	4
4	1	1
4	4	2

で起こり得るすべての場合が尽くされるから, $a^2 + 2b^2$ が 5 の倍数ならば a も b も 5 で割り切れる場合に限られる。(証明おわり)

- (2) 5 と 3 は互いに素であるから, $5(a^2 + 2b^2) = 3c^2$ が成り立つならば, c^2 は 5 で割り切れる。

5 は素数であるから c は 5 で割り切れ,

$$c = 5c_1 \quad (c_1 \text{ は整数})$$

と表され,

$$a^2 + 2b^2 = 15c_1^2$$

このとき, (1) より a, b はともに 5 の倍数であり,

$$a = 5a_1, \quad b = 5b_1$$

を満たす整数 a_1, b_1 が存在して,

$$5(a_1^2 + 2b_1^2) = 3c_1^2$$

以上の操作を繰り返すことにより, 任意の自然数 n について

$$a = 5^n a_n, \quad b = 5^n b_n, \quad c = 5^n c_n$$

を満たす整数 a_n, b_n, c_n が存在することになるが、0 でなければ有限回の操作で終わるから、 $a = b = c = 0$ である。 (証明おわり)