

数チャレ 第251回 (2021年12月)

$(m+1)^n - m^n = 2101$ を満たす自然数の組 (m, n) をすべて求めよ。

解答

$f(x) = (x+1)^n - x^n$ とおくと, $x > 0$ において

$$f'(x) = n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1} > 0$$

であるから, $x \geq 1$ において $f(x)$ は増加し,

$$(m+1)^n - m^n \geq 2^n - 1^n$$

$$2^{12} - 1^{12} = 4095 > 2101 \text{ および } (m+1) - m = 1 \neq 2101 \text{ より}$$

$$2 \leq n \leq 11$$

のときだけ調べれば十分である。

$$(m+1)^n - m^n = 2101 \quad \dots\dots (*)$$

(i) $n = 2k$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) のとき, (*) は

$$(m+1)^{2k} - m^{2k} = \{(m+1)^k + m^k\}\{(m+1)^k - m^k\} = 11 \times 191$$

と書けるから, $(m+1)^k + m^k > (m+1)^k - m^k > 0$ を考えて

$$((m+1)^k + m^k, (m+1)^k - m^k) = (2101, 1) \text{ または } (191, 11)$$

$(m+1)^k - m^k = 1$ となるのは $k = 1$ のときに限られ,

$$(m+1) + m = 2101 \quad \therefore m = 1050$$

$(m+1)^k - m^k = 11$ のときは, $2^4 - 1^4 = 15 > 11$ より $k = 1, 2, 3$ に限られ,

$$(m+1)^3 - m^3 = 3(m^3 + m) + 1 \neq 11,$$

$$(m+1) - m \neq 11$$

より

$$(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1 = 11 \quad \therefore m = 5$$

このとき, $6^2 + 5^2 = 61$ であるから, $(m+1)^2 + m^2 = 191$ を満たさない。

(*) を満たすのは

$$(m, n) = (1050, 2)$$

(ii) $n = 3$ のとき, (*) は

$$(m+1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1 = 2101$$

$$\therefore m(m+1) = 700$$

$25 \times 26 = 650, 26 \times 27 = 702$ より, (*) を満たす自然数 m は存在しない。

(iii) $n = 5$ のとき, (*) は

$$(m+1)^5 - m^5 = 5m^4 + 10m^3 + 10m^2 + 5m + 1 = 2101$$

$$m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m = 420$$

$$m(m^3 + 1) + 2m^2(m+1) = 420$$

$$m(m+1)(m^2 + m + 1) = 420$$

$$\{m(m+1)\}^2 < m(m+1)(m^2 + m + 1) = 420 < 441 = 21^2 \text{ より}$$

$$m(m+1) \leq 20$$

420 の 20 以下の正の約数で隣り合う整数の積となるものは

$$1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5$$

であり, $4 \times 5 \times (4^2 + 4 + 1) = 420$ であるから, (*) を満たすのは

$$m = 4$$

のみである。

(iv) $n = 7$ のとき, (*) は

$$(m+1)^7 - m^7 = 7m^6 + 21m^5 + 35m^4 + 35m^3 + 21m^2 + 7m + 1 = 2101$$

$$m^6 + 3m^5 + 5m^4 + 5m^3 + 3m^2 + m = 300$$

$$m(m^5 + 1) + 3m^2(m^3 + 1) + 5m^3(m + 1) = 300$$

$$m(m+1)\{m^4 - m^3 + m^2 - m + 1 + 3m(m^2 - m + 1) + 5m^2\} = 300$$

$$m(m+1)(m^2 + m + 1)^2 = 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

$m^3(m+1)^3 < 300$ より $m(m+1) = 1 \times 2$ または 2×3 に限られるが,

$$2 \times 3 \times (2^2 + 2 + 1)^2 = 294$$

であるから, (*) を満たす自然数 m は存在しない。

(v) $n = 9$ のとき, (*) は

$$(m+1)^9 - m^9 = 9m^8 + 36m^7 + 84m^6 + 126m^5$$

$$+ 126m^4 + 84m^3 + 36m^2 + 9m + 1 = 2101$$

$$9(m^8 + m) + 36(m^7 + m^2) + 84(m^6 + m^3) + 126(m^5 + m^4) = 2100$$

$$3(m^8 + m) + 12(m^7 + m^2) + 28(m^6 + m^3) + 42(m^5 + m^4) = 700$$

$$\therefore 28(m^6 + m^3) \equiv 700 \pmod{3}$$

$$28 = 3 \times 9 + 1, \quad 700 = 3 \times 233 + 1 \quad \text{より}$$

$$m^6 + m^3 \equiv 1 \pmod{3}$$

が成り立たなければならないが, $0^6 + 0^3 = 0$, $1^6 + 1^3 = 2$, $(-1)^6 + (-1)^3 = 0$ であるから, (*) を満たす自然数 m は存在しない。

(vi) $n = 11$ のとき, (*) は

$$\sum_{k=1}^{10} {}_{11}C_k m^k = 2100 = 11 \times 191 - 1$$

$${}_{11}C_k = \frac{11}{k} {}_{10}C_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 10) \text{ は } 11 \text{ で割り切れ, } 2100 \text{ は } 11 \text{ で割り切れないから, } (*) \text{ を満たさない。}$$

以上より, $(m+1)^n - m^n = 2101$ を満たす自然数の組 (m, n) は

$$(m, n) = (1050, 2), (4, 5) \quad (\text{答})$$