数チャレ 第252回(2022年1月)

楕円 $\dfrac{x^2}{2022^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ 上にあるすべての格子点の座標を求めよ。

解答

$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の範囲にある楕円周上の格子点を $(m,\ n)$ とすると

$$4^2m^2+2022^2n^2=4^2\times 2022^2$$

$$2^2m^2+1011^2n^2=4^2\times 1011^2 \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

$$\therefore\ \ 2^2m^2=1011^2(16-n^2)$$

2^2 と 1011^2 (奇数) は互いに素であるから

m^2 は 1011^2 で割り切れる。

$0 \leqq m \leqq 2022$ より

$$m=0,\ 1011,\ 2022$$

に限られ，$(*)$ より

$m=0$ のとき　$n=4$

$m=1011$ のとき　$n^2=4^2-2^2=12$ は平方数でないから不適

$m=2022$ のとき　$n=0$

x 軸および y 軸に関して対称であることを考えて，求めるすべての格子点の座標は

$(2022,\ 0),\ (0,\ 4),\ (-2022,\ 0),\ (0,\ -4)$　(答)

ⓒ 早稲田数学フォーラム