数チャレ 第253回(2022年2月)

n を2以上の整数とする。自然数(1以上の整数)の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。

(1) 連続する2個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

出典：2012年 東京大学 理科

解答

(1) 背理法で証明する。

ある自然数 m に対して $m(m+1)$ が n 乗数であるとすれば，m と $m+1$ は互いに素であるから，

$$m = a^n,\quad m+1 = b^n$$

を満たす自然数 $a,\ b$ が存在する。辺々差をとって m を消去すると，

$$1 = b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-1})$$

$1 \leqq a < b$ を考えて

$$\begin{cases} b - a = 1 \\ b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-1} = 1 \end{cases}$$

となるが，$b,\ a$ は自然数であるから

$$b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-1} \geqq n \geqq 2$$

となって矛盾する。

よって，連続する2個の自然数の積は n 乗数でない。 (証明おわり)

(2) 背理法で証明する。

$$m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1) = a^n \quad (m,\ a \text{ は自然数})$$

と表されるとすれば，$m^n < m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1) < (m+n-1)^n$ より

$$m^n < a^n < (m+n-1)^n$$

$$\therefore\ m < a < m+n-1$$

$n=2$ のときは $m < a < m+1$ となって矛盾する。

$n=3$ のときは，

$$a = m+k \quad (1 \leqq k \leqq n-2)$$

なる自然数 k が存在して，

$$a+1 \text{ も } a^n = m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1) \text{ の約数}$$

となるが，a と $a+1$ は互いに素であるからこれは不可能である。

よって，連続する n 個の自然数の積は n 乗数でない。 (証明おわり)

(参考) 本問を一般化して，2以上の整数 $m,\ n$ に対して

© 早稲田数学フォーラム

連続する m 個の自然数の積は n 乗数ではない

ことが，Erdös と Selfridge により 1975 年に証明されている。その証明は

$Illinois.\,J.\,Math.$ 19 (1975) 292 − 301

に掲載されている。

© 早稲田数学フォーラム