

数チャレ 第254回 (2022年3月)

x, y についての方程式

$$x^2 - 6xy + y^2 = 9 \quad \dots\dots (*)$$

に関する次の問いに答えよ。

(1) x, y がともに正の整数であるような $(*)$ の解のうち, y が最小であるものを求めよ。

(2) 数列 a_1, a_2, a_3, \dots が漸化式

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。このとき, $(x, y) = (a_{n+1}, a_n)$ が $(*)$ を満たすならば, (a_{n+2}, a_{n+1}) も $(*)$ を満たすことを示せ。

(3) $(*)$ の整数解 (x, y) は無数に存在することを示せ。

出典：2022年 千葉大学

解答

(1) $y = 1$ のとき, $(*)$ は

$$x^2 - 6x - 8 = 0$$

であり,

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = 3^2 + 8 = 17$$

は平方数でないから, 整数解をもたない。

$y = 2$ のとき, $(*)$ は

$$x^2 - 12x - 5 = 0$$

であり,

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = 6^2 + 5 = 41$$

は平方数でないから, 整数解をもたない。

$y = 3$ のとき, $(*)$ は

$$x^2 - 18x = x(x - 18) = 0$$

y が最小である正の整数解は

$$(x, y) = (18, 3) \quad (\text{答})$$

(2) $(x, y) = (a_{n+1}, a_n)$ が $(*)$ を満たすならば,

$$a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + a_n^2 = 9$$

が成り立ち,

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0$$

により a_{n+2} を定めると,

$$\begin{aligned} a_{n+2}^2 - 6a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}^2 \\ &= (6a_{n+1} - a_n)^2 - 6(6a_{n+1} - a_n)a_{n+1} + a_{n+1}^2 \\ &= a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + a_n^2 = 9 \end{aligned}$$

となって, $(x, y) = (a_{n+2}, a_{n+1})$ も (*) を満たす。 (証明おわり)

(3) 漸化式 $a_1 = 3, a_2 = 18, a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0$ により数列 $\{a_n\}$ を定めるとき,

$$0 < a_n < a_{n+1}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す。

1° $n = 1$ のとき

$$a_1 = 3, a_2 = 18$$

であるから成り立つ。

2° $0 < a_k < a_{k+1}$ であるとすれば,

$$a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k = 5a_{k+1} + (a_{k+1} - a_k) > a_{k+1}$$

が成り立つ。

1°, 2° より

$$a_1 = 3 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$$

である。

(1), (2) より $(x, y) = (a_{n+1}, a_n)$ はすべて (*) の整数解であるから, (*) の整数解 (x, y) は無数に存在する。 (証明おわり)

(注) 本問は, いわゆる整数論的手法を全く用いていないので整数問題とは言えない可能性はあるが, 無数に整数解があることを示す例として取り上げた。