

数チャレ 第255回 (2022年4月)

a, b を整数とする。また, 整数の数列 $\{c_n\}$ を $c_1 = a, c_2 = b$ および漸化式

$$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $a = 39, b = 13$ とする。このとき, 二つの整数 c_5 と c_6 の最大公約数を求めよ。
- (2) a と b はともに奇数であるとする。このとき, 自然数 n に対して次の命題 P_n が成り立つことを, n についての数学的帰納法で示せ。

P_n : c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり, c_{3n} は偶数である。

- (3) d を自然数とし, a と b はともに d の倍数であるとする。このとき, 自然数 n に対して c_n が d の倍数になることを示せ。ただし, 数学的帰納法を用いて証明すること。
- (4) c_{2022} が奇数であるならば, $a + b$ も奇数であることを示せ。

出典: 2022年 広島大学

解答

- (1) $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ より

$$\gcd(c_{n+2}, c_{n+1}) = \gcd(c_{n+1}, c_n)$$

であるから

$$\begin{aligned} \gcd(c_5, c_6) &= \gcd(c_5, c_4) \\ &= \gcd(c_4, c_3) \\ &= \gcd(c_3, c_2) \\ &= \gcd(c_2, c_1) \\ &= \gcd(13, 39) \\ &= 13 \end{aligned} \quad (\text{答})$$

- (2) $a = c_1$ と $b = c_2$ はともに奇数であるから,

$$c_3 = c_2 + c_1 = b + a \text{ は偶数}$$

であり, P_1 が成り立つ。

P_k が成り立つとすれば,

$$c_{3k-2}, c_{3k-1} \text{ は奇数, } c_{3k} \text{ は偶数}$$

であり,

$c_{3k+1} = c_{3k} + c_{3k-1}$ は奇数 (偶数と奇数の和)

$c_{3k+2} = c_{3k+1} + c_{3k}$ は奇数 (奇数と偶数の和)

$c_{3k+3} = c_{3k+2} + c_{3k+1}$ は偶数 (2つの奇数の和)

となって, P_{k+1} が成り立つ。

よって, 数学的帰納法(の論理)により, すべての自然数 n に対して P_n が成り立つことが示された。 (おわり)

(3) a と b がともに d の倍数であるとき,

c_n が d の倍数

であることを数学的帰納法で証明する。

1° 既に, $c_1 = a, c_2 = b$ は d の倍数である。

2° c_k, c_{k+1} が d の倍数であるとすれば,

$$c_k = dc'_k, \quad c_{k+1} = dc_{k+1}'$$

を満たす整数 c'_k, c_{k+1}' が存在する。 $c_{k+2} = c_{k+1} + c_k$ より

$$c_{k+2} = d(c_{k+1}' + c'_k)$$

となって, c_{k+2} も d の倍数である。

1°, 2° よりすべての自然数 n に対して c_n が d の倍数であることが示された。

(おわり)

(4) $a + b$ が偶数ならば, a と b の偶奇は等しく,

a と b がともに奇数ならば, (2) より $c_{2022} = c_{3 \times 674}$ は偶数

a と b がともに偶数ならば, (3) より c_{2022} は 2 の倍数

であるから,

$a + b$ が偶数ならば, c_{2022} は偶数である。

対偶をとると, c_{2022} が奇数ならば, $a + b$ も奇数である。

(証明おわり)