

数チャレ 第256回(2022年5月)

p を素数とする。正の整数 n に対して,

$$f(n) = \frac{1}{2} \sqrt{n^2 + 28p^2}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) $p = 2$ のとき, $f(n)$ が整数となるような n をすべて求めよ。
- (2) $p \geq 3$ のとき, $f(n)$ が整数となるような n をすべて求めよ。
- (3) $f(2022)$ が整数となるような p をすべて求めよ。次に示す素因数分解を用いてよい。

$$2021 = 43 \times 47$$

$$2022 = 2 \times 3 \times 337$$

$$2023 = 7 \times 17^2$$

$$2024 = 2^3 \times 11 \times 23$$

$$2025 = 3^4 \times 5^2$$

$$2026 = 2 \times 1013$$

$$2027 : \text{素数}$$

$$2028 = 2^2 \times 3 \times 13^2$$

$$2029 : \text{素数}$$

出典 : 2022 年 横浜国立大学

解答

$f(n)$ が整数となるのは,

$$n^2 + 28p^2 = (2m)^2$$

を満たす正の整数 m が存在するときであり,

$$(2m + n)(2m - n) = 28p^2$$

- (1) $p = 2$ のとき

$$(2m + n)(2m - n) = 2^4 \times 7$$

$(2m + n) - (2m - n) = 2n$ より, 2 数の偶奇は等しく,

$$0 < 2m - n < 2m + n$$

を考えると,

$$(2m - n, 2m + n) = (2, 56), (4, 28), (8, 14)$$

$(2m + n) + (2m - n) = 4m$ より

$$2m - n = 4, \quad 2m + n = 28$$

の場合だけに限られ,

$$n = 12 \quad (\text{答})$$

- (2) $p \geq 3$ (p が奇素数) のとき

$$(2m + n)(2m - n) = 2^2 \cdot 7 \cdot p^2$$

$2m - n, 2m + n$ はともに偶数の場合に限られ, $7 < p^2$ にも注意すると

$$(2m - n, 2m + n) = (2, 2 \cdot 7 \cdot p^2), (2p, 2 \cdot 7 \cdot p), (14, 2p^2)$$

p は奇数であることより,

$$2 + 2 \cdot 7 \cdot p^2 = 2(7p^2 + 1),$$

$$2p + 14p = 16p,$$

$$14 + 2p^2 = 2(p^2 + 7)$$

はいずれも 4 で割り切れ, 条件を満たすから, $f(n)$ が整数となるような n は

$$n = 7p^2 - 1, 6p, p^2 - 7 \quad (\text{答})$$

(3) (1) より, $f(2022)$ が整数となるとすれば,

p は奇素数

であり, (2) において

$$n = 2022 = 2 \times 3 \times 337$$

にあてはめると,

$$2022 = 7p^2 - 1 \text{ より } p = 17,$$

$$2022 = 6p \text{ より } p = 337,$$

2029 は素数であり,

$$2022 = p^2 - 7 \text{ を満たす素数 } p \text{ は存在しない}$$

から, $f(2022)$ が整数となるような素数 p は

$$p = 17, 337 \quad (\text{答})$$