

数チャレ 第257回 (2022年6月)

次の問いに答えなさい。

- (1) 2つの関数 $f(x) = 6(x^2 + 1)$, $g(x) = x^3 + 11x$ について考える。不等式 $f(x) \geq g(x)$ を満たす実数 x の範囲を求めなさい。
- (2) $\frac{6(n^2 + 1)}{n^3 + 11n}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めなさい。
- (3) $\frac{6(n^2 + 1)}{n^3 + 11n} + \frac{1}{9k}$ が自然数となるような自然数 n, k の組 (n, k) をすべて求めなさい。

出典：2022年 東京理科大学 経営学部

解答

- (1) $g(x) - f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \leq 0$
を解いて、
 $x \leq 1$ または $2 \leq x \leq 3$ (答)

- (2) $\frac{6(n^2 + 1)}{n^3 + 11n} = \frac{f(n)}{g(n)}$ が自然数となるには
 $\frac{f(n)}{g(n)} \geq 1$ が必要

であり、(1)より

$$n \leq 1 \text{ または } 2 \leq n \leq 3$$

n は自然数であるから、

$$n = 1, 2, 3 \text{ が必要}$$

である。(1)の計算より

$$\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{f(3)}{g(3)} = 1$$

であるから、自然数である条件を満たして十分であり、

$$n = 1, 2, 3 \text{ (答)}$$

- (3) (2)の考察より、 n が自然数であるとき

$$0 < \frac{6(n^2 + 1)}{n^3 + 11n} \leq 1$$

であるから、 $\frac{6(n^2 + 1)}{n^3 + 11n} + \frac{1}{9k}$ が自然数になるとすれば、

$$\frac{6(n^2 + 1)}{n^3 + 11n} + \frac{1}{9k} = 1$$

$$\frac{n^3 - 6n^2 + 11n - 6}{n^3 + 11n} = \frac{1}{9k}$$

$$9k(n-1)(n-2)(n-3) = n^3 + 11n$$

$n = 1, 2, 3$ のときは成り立たないので,

$$n \geq 4$$

として考えればよい。

$$F(x) = \frac{x^3 + 11x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x^3 + 11x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \quad (x \geq 4)$$

とおくと、題意の条件は

$$F(n) = 9k$$

が成り立つことと同値であり、

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{(3x^2 + 11)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) - (x^3 + 11x)(3x^2 - 12x + 11)}{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2} \\ &= \frac{-6x^4 + 48x^2 - 66}{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2} \\ &= \frac{-6(x^4 - 8x^2 + 11)}{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2} \end{aligned}$$

$x \geq 4$ において

$$-(x^4 - 8x^2 + 11) = -(x^2 - 4)^2 + 5 \leq -(4^2 - 4)^2 + 5 = -139 < 0$$

$$\therefore F'(x) < 0$$

$F(n)$ は $n \geq 4$ において減少関数であり、

$$F(4) = \frac{64 + 44}{3 \times 2 \times 1} = 18 = 9 \times 2$$

$$F(5) = \frac{125 + 55}{4 \times 3 \times 2} = \frac{15}{2} < 9$$

であるから、 $F(n) = 9k$ を満たす自然数の組 (n, k) は

$$(n, k) = (4, 2) \quad (\text{答})$$

のみである。