

数チャレ 第258回(2022年7月)

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ とする。なお、実数 e の存在は証明しなくてよい。

(1) $2 < e < 3$ であることを示せ。

(2) $e \log 2$ の整数部分を求めよ。ただし、 $\log$ は e を底とする対数(自然対数)である。

解答

(1) 二項定理を用いると

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + {}_nC_2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 + {}_nC_3 \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + {}_nC_n \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
 &> 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2n} \\
 &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
 &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} \\
 &= \frac{5}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k-1)(k-2)} \\
 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \left\{ \frac{1}{(k-1)(k-2)} - \frac{1}{k(k-1)} \right\} \\
 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1}{n(n-1)} \right\} < \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{4}
 \end{aligned}$$

と評価することができて、 $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\frac{5}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{11}{4}$$

$2 < \frac{5}{2}, \frac{11}{4} < 3$ であるから、 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ について

$$2 < e < 3$$

が成り立つ。

(証明おわり)

(2) (1) より

$$e \log 2 = \log 2^e > \log 2^2 > \log e = 1$$

が成り立つ。

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

とおくと、

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$x > 0$ において

$$f'(x) > 0 \iff 1 - \log x > 0 \iff \log x < 1 = \log e \iff x < e$$

であるから、 $f(x)$ の増減は

x	(0)	e	(∞)
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$ 極大 $\searrow$	(0)

となる。(1) より $2 < e$ であることにも注意すると

$$2 - e \log 2 = 2e \left(\frac{1}{e} - \frac{\log 2}{2} \right) = 2e \{f(e) - f(2)\} > 0$$

が成り立つことがわかるから、

$$1 < e \log 2 < 2$$

が得られ、

$$e \log 2 \text{ の整数部分は } 1 \quad (\text{答})$$

である。