

数チャレ 第259回 (2022年8月)

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (n \text{ は自然数}) \text{ とする.}$$

- (1) a_{n+2} を a_n で表せ。
 (2) $n \geq 2$ のとき, $a_{2n+1} > \frac{1}{n}$ となることを示せ。

解答

- (1) 部分積分法により

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \sin x dx \\ &= \left[\sin^{n+1} x (-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \sin^n x \cos x \cdot (-\cos x) dx \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n+1)(a_n - a_{n+2}) \\ (n+2)a_{n+2} &= (n+1)a_n \\ \therefore a_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2} a_n \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) a_1 を計算すると

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

- (1)を用いると

$$a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} a_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} a_1$$

ここで,

$$\frac{2k}{2k+1} - \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2k)^2 - (2k+1)(2k-1)}{2k(2k+1)} = \frac{1}{2k(2k+1)} > 0$$

より

$$\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} > \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} &a_{2n+1}^2 \\ &> \left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) \times \left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

であり, $n \geq 3$ ならば

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (2n+1)}{n^2(2n+1)} = \frac{(n-1)^2 - 2}{n^2(2n+1)} > 0$$

より

$$a_{2n+1}^2 > \frac{1}{n^2}$$

$n = 2$ のときは, 直接調べて

$$a_5 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot a_1 = \frac{8}{15} > \frac{1}{2}$$

両者をあわせて,

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_{2n+1} > \frac{1}{n}$$

が成り立つ。

(証明おわり)