

## 数チャレ 第260回 (2022年9月)

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$ ,  $a > b > c > d$  を満たす自然数の組  $(a, b, c, d)$  をすべて求めよ。

解答

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{d} \text{ より}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1 < \frac{4}{d}$$

$$\frac{1}{d} < 1 \text{ を考えあわせて}$$

$$1 < d < 4$$

$d$  は自然数であるから,

$$d = 2 \text{ または } d = 3$$

(i)  $d = 2$  のとき

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} < \frac{3}{c}$$

より

$$c < 6$$

$d = 2 < c$  も考えて,

$$c = 3, 4, 5$$

(i-1)  $c = 3$ ,  $d = 2$  のとき

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$$

$$ab = 6(a + b)$$

$$(a - 6)(b - 6) = 36$$

$$a - 6 > b - 6 > c - 6 = -3 \text{ より}$$

$$(a - 6, b - 6) = (36, 1), (18, 2), (12, 3), (9, 4)$$

$$\therefore (a, b) = (42, 7), (24, 8), (18, 9), (15, 10)$$

(i-2)  $c = 4$ ,  $d = 2$  のとき

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$$

$$ab = 4(a + b)$$

$$(a - 4)(b - 4) = 16$$

$$a - 4 > b - 4 > c - 4 = 0 \text{ より}$$

$$(a - 4, b - 4) = (16, 1), (8, 2)$$

$$\therefore (a, b) = (20, 5), (12, 6)$$

(i-3)  $c = 5, d = 2$  のとき

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{10}$$

$$ab = \frac{10}{3}(a+b)$$

$$\left(a - \frac{10}{3}\right)\left(b - \frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9}$$

$$(3a - 10)(3b - 10) = 100$$

$3a - 10 > 3b - 10 > 3c - 10 = 5$  より自然数  $a, b$  は存在しない。

(ii)  $d = 3$  のとき

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3} < \frac{3}{c}$$

より

$$c < \frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

$d = 3 < c$  も考えて

$$c = 4$$

このとき,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$ab = \frac{12}{5}(a+b)$$

$$\left(a - \frac{12}{5}\right)\left(b - \frac{12}{5}\right) = \frac{144}{25}$$

$$(5a - 12)(5b - 12) = 144$$

$5a - 12 > 5b - 12 > 5c - 12 = 8$  より

$$5a - 12 = 16, \quad 5b - 12 = 9$$

の場合に限られるが, これを満たす自然数  $a, b$  は存在しない。

以上より, 求める自然数の組は

$$(a, b, c, d) = (42, 7, 3, 2), (24, 8, 3, 2), (18, 9, 3, 2), \\ (15, 10, 3, 2), (20, 5, 4, 2), (12, 6, 4, 2)$$

(答)