

数チャレ 第261回 (2022年10月)

- (1) $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ とする。任意の整数 n に対して $f(n)$ は 5 で割り切れることを示せ。
- (2) $g(x)$ は整数係数の 4 次式であるとする。任意の整数 n に対して $g(n)$ が 5 で割り切れるならば、 $g(x)$ のすべての係数は 5 で割り切れることを示せ。

解答

- (1) 連続する 5 つの整数 $n, n-1, n-2, n-3, n-4$ のうち 1 つは 5 で割り切れるから、任意の整数 n に対して $f(n) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ は 5 で割り切れる。
(証明おわり)

- (2) $g(x)$ の 4 次係数を $a (\neq 0)$ とおくと、3 次以下のある多項式 $h(x)$ を用いて

$$g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3) + h(x)$$

と表され、 $h(x)$ は整数係数である。この操作を続けるとついに

$$g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-1)(x-2) + cx(x-1) + dx + e$$

(a, b, c, d, e は整数定数)

の形にまで変形できる。

任意の整数 n に対して $g(n)$ が 5 で割り切れるならば、

$$g(0) = e \equiv 0 \pmod{5}$$

$$g(1) = d + e \equiv 0 \pmod{5}$$

$$g(2) = 2c + 2d + e \equiv 0 \pmod{5}$$

$$g(3) = 6b + 6c + 3d + e \equiv 0 \pmod{5}$$

$$g(4) = 24a + 24b + 12c + 4d + e \equiv 0 \pmod{5}$$

が成り立つから、順に考えていくことにより

$$e, d, 2c, 6b, 24a \text{ はそれぞれ } 5 \text{ で割り切れる。}$$

2 と 5 は互いに素であるから、

$$c \text{ は } 5 \text{ で割り切れる。}$$

$6 = 2 \times 3$ と 5 は互いに素であるから、

$$b \text{ は } 5 \text{ で割り切れる。}$$

$24 = 2^3 \times 3$ と 5 は互いに素であるから、

$$a \text{ は } 5 \text{ で割り切れる。}$$

$g(x)$ の各係数は a, b, c, d, e の整数倍の和で表されるから、 $g(x)$ のすべての係数は 5 で割り切れる。
(証明おわり)