

数チャレ 第262回(2022年11月)

- (1) n を整数とすると、 $(n^2 - 1)(n^2 - 4)(n^2 - 9)$ を 7 で割ったときの余りを求めよ。
(2) 素数 p に対して、 $p^6 + 6$ は素数でないことを示せ。

解答

- (1) n が 7 で割り切れるとき

$$\begin{aligned}(n^2 - 1)(n^2 - 4)(n^2 - 9) &\equiv (0 - 1)(0 - 4)(0 - 9) \pmod{7} \\ &\equiv -36 \pmod{7} \\ &\equiv -(7 - 1) \times 6 \pmod{7} \\ &\equiv 6 \pmod{7}\end{aligned}$$

n が 7 で割り切れないとき、 n を 7 で割った余りは 1, 2, 3, 4 ($= 7 - 3$), 5 ($= 7 - 2$), 6 ($= 7 - 1$) のいずれかであるから、

$$\begin{aligned}(n^2 - 1)(n^2 - 4)(n^2 - 9) &\equiv (n + 1)(n - 1)(n + 2)(n - 2)(n + 3)(n - 3) \\ &\equiv 0 \pmod{7}\end{aligned}$$

まとめると、 $(n^2 - 1)(n^2 - 4)(n^2 - 9)$ を 7 で割ったときの余りは

$$7 \mid n \text{ のとき } 6, \quad 7 \nmid n \text{ のとき } 0 \quad (\text{答})$$

- (2) $p = 7$ のとき、

$$7^6 + 6 \equiv 2^6 + 1 \equiv 65 \equiv 0 \pmod{5}$$

より、 $7^6 + 6$ は (10 以上の 5 の倍数であるから) 素数ではない。

p が 7 でない素数であるとき、(1) より

$$\begin{aligned}p^6 + 6 &= (p^2 - 1)(p^2 - 4)(p^2 - 9) + 14p^4 - 49p^2 + 42 \\ &= (p^2 - 1)(p^2 - 4)(p^2 - 9) + 7(2p^4 - 7p^2 + 6)\end{aligned}$$

は 7 で割り切れるから、素数になるとすれば

$$p^6 + 6 = 7$$

に限られる。ところが、このとき

$$p^6 = 1$$

となって、 p が素数 (特に 2 以上の整数) であることに反する。

よって、 p が素数であるとき、 $p^6 + 6$ は素数でない。 (証明おわり)