## 数チャレ 第263回(2022年12月)

自然数nに対して, $a_n = \frac{3^n - 1}{2^n}$ とおく。

- (1) n が 3 以上の奇数であるとき ,  $a_n$  は整数でないことを示せ。
- (2)  $4^n > 3^{n+1}$  となる自然数 n を求めよ。
- (3)  $a_n$  が整数となる自然数 n をすべて求めよ。

## 解答

n が奇数であるとき ,

$$3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3 + 1$$
 は奇数  $(n$  個の奇数の和)

であり,

$$3^{n}-1=2(3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3+1)$$
 は  $2^{2}$  で割れない

から,nが3以上の奇数ならば, $a_n$ は整数でない。

(証明おわり)

(2)  $4^n \ge 3^{n+1}$  **EDIT** 

$$n=1$$
 のとき  $4<3^2$ 

$$n=2$$
 のとき  $4^2<3^3$ 

$$n=3$$
のとき  $4^3 < 3^4$ 

$$n=4$$
 のとき  $4^4>3^5$ 

であり,  $4^k > 3^{k+1}$  が成り立つならば,

$$4^{k+1} = 4 \cdot 4^k > 4 \cdot 3^{k+1} > 3 \cdot 3^{k+1} = 3^{k+2}$$

も成り立つから,数学的帰納法により

$$n \ge 4$$
 のとき  $4^n > 3^{n+1}$ 

であることが示された。

よって,  $4^n > 3^{n+1}$  となる自然数 n は

である。

(3) (1)より,  $a_1 = 1$  以外はn が偶数のときだけ調べればよい。

$$n=2m$$
 ( $m$  は自然数)

とおくと,

$$(3^m + 1) - (3^m - 1) = 2$$

より  $3^m+1$ と  $3^m-1$ の一方は 4 で割れないから,

$$a_n = a_{2m} = \frac{(3^m + 1)(3^m - 1)}{2 \cdot 2^{2m-1}}$$

が整数であるとすれば、

$$rac{3^m+1}{2^{2m-1}}=rac{2(3^m+1)}{2^{2m}}$$
または  $rac{3^m-1}{2^{2m-1}}=rac{2(3^m-1)}{2^{2m}}$  は整数

である。ここで,

$$3^{m+1} = 2 \cdot 3^m + 3^m > 2(3^m + 1) > 2(3^m - 1)$$

であるから ,  $a_n = a_{2m}$  が整数になるとすれば , (2)より  $m \leq 3$ 

の場合に限られる。

$$a_2 = \frac{3^2 - 1}{2^2} = \frac{9 - 1}{4} = 2$$

$$a_4 = \frac{3^4 - 1}{2^4} = \frac{81 - 1}{16} = 5$$

$$a_6 = \frac{3^6 - 1}{2^6} = \frac{729 - 1}{64} = \frac{91}{8}$$

であるから ,  $a_1=1$  とあわせて ,  $a_n$  が整数となる自然数 n は  $n=1,\ 2,\ 4$  (答)

ですべてである。