

数チャレ 第264回 (2023年1月)

方程式 $x^2 - y^2 = 2023$ を満たす自然数の組 (x, y) で互いに素でないものを求めよ。

解答

$$2023 = 7 \times 17^2$$

と素因数分解されるから、 x と y の最大公約数を d とすると

$$d^2 \mid 7 \times 17^2$$

より

$$d = 1 \text{ または } 17$$

であり、互いに素でないときは

$$d = 17$$

である。

$$x = 17a, y = 17b \quad (a \text{ と } b \text{ は互いに素な自然数})$$

とおくと、与えられた方程式は

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 7$$

であり、 $a + b > a - b > 0$ より

$$a + b = 7 \text{ かつ } a - b = 1$$

の場合に限られるから

$$a = 4, b = 3$$

このとき a と b が互いに素な自然数であることも満たすから、求める自然数の組は

$$(x, y) = (68, 51) \quad (\text{答})$$

である。

(注) 上の解答は、整数の積の組合せだけを考えて $a = 4, b = 3$ を導いているのでそれは必要条件にすぎず、互いに素な自然数であるという十分条件をチェックしなければならないという指針で書かれている。実は、「 $a + b$ と $a - b$ が互いに素」であれば「 a と b が互いに素」であることは証明できるので、考察を2つに分けないという方針で答えをまとめてもよい。ただ、本問では整数の積の組合せで解の候補が1組に絞られてしまうので、候補の値を直接チェックする方が楽ではある。