

## 数チャレ 第265回(2023年2月)

$N$  を1以上の整数とする。 $N$  の約数の和が、その整数の2倍になるときその整数  $N$  を完全数という。その例の1つとして  $N = 28$  が知られている。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 28 の約数をすべて求めよ。また 28 が完全数であることを示せ。
- (2) 異なる2つの素数  $a, b$  に対して、この2つの数の積  $N = ab$  で表される完全数をすべて求めよ。
- (3)  $x \geq 2$  のとき、不等式  $1 < \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} \leq 7$  が成り立つことを示せ。
- (4) 異なる2つの素数  $c, d$  に対して、この2つの数を用いて作られる数  $N = c^2d$  で表される完全数をすべて求めよ。
- (5) 異なる2つの素数  $e, f$  に対して、この2つの数を用いて作られる数  $N = e^2f^2$  で表される完全数が存在しないことを示せ。

出典：2013年 同志社大学 社会学部

解答 (1) 28 の正の約数は

$$1, 2, 4, 7, 14, 28 \quad (\text{答})$$

であり、その和は

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 28$$

であるから、28 は完全数である。

(おわり)

(2)  $N = ab$  ( $a, b$  は素数,  $a < b$ ) が完全数となる条件は

$$1 + a + b + ab = 2ab$$

$$ab - a - b = 1 \quad \therefore (a-1)(b-1) = 2$$

$1 \leq a-1 < b-1$  より

$$a-1 = 1, \quad b-1 = 2 \quad \therefore a = 2, \quad b = 3$$

$N = ab$  ( $a, b$  は異なる素数) で表される完全数は

$$N = 6 \quad (\text{答})$$

のみである。

(3)  $x \geq 2$  のとき

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 1$$

であることに注意すると、

$$7(x^2 - x - 1) - (x^2 + x + 1) = 6x^2 - 8x - 8$$

$$= 2(x-2)(3x+2) \geq 0$$

$$(x^2 + x + 1) - (x^2 - x - 1) = 2(x+1) > 0$$

より

$$1 < \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} \leq 7$$

(おわり)

(4)  $N = c^2d$  ( $c, d$  は異なる素数) のとき

$$1 + c + c^2 + d + cd + c^2d = 2c^2d$$

$$d(c^2 - c - 1) = c^2 + c + 1 \quad \therefore d = \frac{c^2 + c + 1}{c^2 - c - 1}$$

(3)より,  $d$  は 7 以下の素数であるから

$$d = 2, 3, 5, 7$$

必要条件として,  $c$  の 2 次方程式

$$(d-1)c^2 - (d+1)c - (d+1) = 0$$

の判別式  $D(d) = (d+1)^2 + 4(d-1)(d+1) = (d+1)(5d-3)$  は平方数となるから,

$$D(2) = 3 \times 7, D(3) = 2^4 \times 3, D(5) = 2^2 \times 3 \times 11, D(7) = 8 \times 32 = 16^2$$

より

$$d = 7$$

このとき,  $c$  の 2 次方程式は

$$6c^2 - 8c - 8 = 2(c-2)(3c+2) = 0 \quad \therefore c = 2$$

$N = c^2d$  ( $c, d$  は異なる素数) で表される完全数は

$$N = 28 \quad (\text{答})$$

のみである。

(5)  $N = e^2f^2$  ( $e, f$  は異なる素数) が完全数であるとすれば,

$$(1+e+e^2)(1+f+f^2) = 2e^2f^2$$

ところが, 隣り合う整数の一方は偶数であるから

$$1+e+e^2 = 1+e(e+1), \quad 1+f+f^2 = 1+f(f+1) \text{ はともに奇数}$$

であり,

$$(1+e+e^2)(1+f+f^2) \text{ は奇数}$$

であるから矛盾する。

よって,  $N = e^2f^2$  ( $e, f$  は異なる素数) で表される完全数は存在しない。

(おわり)

(注) 一般に, すべての約数の和は 0 となるので, 問題文の「約数の和」は「正の約数の和」を指しているものと思われる。