

数チャレ 第266回(2023年3月)

整数 n の正の約数の個数を $d(n)$ と書くことにする．たとえば，10 の正の約数は 1, 2, 5, 10 であるから $d(10) = 4$ である．

(1) 2023 以下の正の整数 n の中で， $d(n) = 5$ となる数は，

(1)	(2)
-----	-----

 個ある．

(2) 2023 以下の正の整数 n の中で， $d(n) = 15$ となる数は，

(3)	(4)
-----	-----

 個ある．

(3) 2023 以下の正の整数 n の中で， $d(n)$ が最大となるのは $n =$

(5)	(6)	(7)	(8)
-----	-----	-----	-----

 のときである．

出典：2023 年 慶應義塾大学 総合政策学部

解答

(1) $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_m^{e_m}$ と素因数分解されるとき

$$d(n) = (1 + e_1)(1 + e_2) \cdots (1 + e_m)$$

と表されるから， $d(n) = 5$ となるのは

n がある素数の 4 乗

のときである。

$$6^4 = 1296, \quad 7^4 = 2401$$

であるから， $d(n) = 5$ ， $n \leq 2023$ を満たす正の整数 n は

$$2^4, 3^4, 5^4 \text{ の } \begin{array}{|c|} \hline 03 \\ \hline \end{array} \text{ 個}$$

(1)(2)

(2) 素因数分解を考えて， $d(n) = 15$ となるのは

$$n = p^2 q^4 \quad (p, q \text{ は異なる素数})$$

と表されるときである。 $q^4 \leq n \leq 2023$ のとき，(1) の考察より

$$q = 2, 3, 5$$

(i) $q = 2$ のとき

$$p^2 \leq \frac{2023}{2^4} = 126 + \frac{7}{16}$$

$$p^2 \leq 11^2$$

p は 2 以外の素数であるから

$$p = 3, 5, 7, 11$$

(ii) $q = 3$ のとき

$$p^2 \leq \frac{2023}{3^4} = 24 + \frac{79}{81}$$

$$p^2 \leq 4^2$$

p は 3 以外の素数であるから

$$p = 2$$

(iii) $q = 5$ のとき

$$p^2 \leq \frac{2023}{5^4} = 3 + \frac{148}{625}$$

となるが, $p^2 \geq 2^2$ であるから不適である。

以上より, $d(n) = 15$, $n \leq 2023$ を満たす正の整数 n は

$$3^2 \cdot 2^4, 5^2 \cdot 2^4, 7^2 \cdot 2^4, 11^2 \cdot 2^4, 2^2 \cdot 3^4 \text{ の } \boxed{05} \text{ 個}$$

(3)(4)

(3) $n = 1680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$ のとき

$$d(1680) = (1+4) \times (1+1)^3 = 2^3 \times 5 = 40$$

であり, $2^4 \times 3^3 \times 5 = 2160$, $2 \times 3^4 \times 5 \times 7 > 2^3 \times 3^4 \times 5 = 3240$ より

$$d(n) = 40, n \leq 2023 \text{ を満たすのは } n = 1680 \text{ のみ}$$

である。

$d(n) \geq 41$, $n \leq 2023$ となる場合を考える。

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210, 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$$

より,

n の素因数は 4 個以下

である。

(i) n の素因数が 4 個のとき

$$2^4 \times 3 \times 5 \times 7 = 1680, 2^5 \times 3 \times 5 \times 7 = 3360 > 2023$$

$$2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 > 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520 > 2023$$

$$2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840, d(840) = 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260, d(1260) = 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36, 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 > 2023$$

$$2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 1890, d(1890) = 2 \times 4 \times 2 \times 2 = 32, 2 \times 3^4 \times 5 \times 7 > 2023$$

$$2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050, d(1050) = 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24, 2 \times 3 \times 5^3 \times 7 > 2023$$

$$2 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 1470, d(1470) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24, 2 \times 3 \times 5 \times 7^3 > 2023$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1155, d(1155) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16, 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 > 2023$$

より, $n \leq 2023$ では $d(n) \geq 41$ とならない。

(ii) n の素因数が 3 個のとき

1 つの素因数が 1 乗であるとすれば, $\frac{41}{2} > 20$ より 9 (= 10 - 1) 乗以上の素因数

があることになるが, $2^9 \times 3 \times 5 = 7680$ より $n \leq 2023$ に反するから,

指数はすべて 2 以上

である。

$$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 900, d(900) = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1800, d(1800) = 4 \times 3 \times 3 = 36, 2^4 \times 3^2 \times 5^2 > 2023$$

$$2^2 \times 3^2 \times 5^3 > 2^2 \times 3^3 \times 5^2 = 2700 > 2023$$

であるから, $n \leq 2023$ では $d(n) \geq 41$ とならない。

(iii) 素因数が 1 個または 2 個のとき

素因数の指数 (の 1 つ) が 21 乗以上となるが,

$$2^{21} > 2^{11} = 2048 > 2023$$

より $n \leq 2023$ に反するから, $d(n) \geq 41$ とならない。

以上より, $n \leq 2023$ において $d(n)$ の最大値は 40 であり, $d(n) = 40$ となるのは

$$n = \boxed{1680}^{(5)(6)(7)(8)}$$

のときである。

(注) 試験としては $d(1680) = 40$ を探し当てるだけで得点できてしまうが,

- $d(n) \geq 41$ となる n は存在しないのか
- $d(n) = 40$ となるのは $n = 1680$ のときだけなのか

を論じなければ, 解答としては不十分である。